





(Nouvelles)
OEA

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

VII.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE ;

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME SEPTIÈME.



PARIS.

CARILLAN-GOEURY ET Vor DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1848.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

MÉTHODE DES HOMOGÈNES.

—

I. Suivant la notation en usage, les coordonnées d'un point sur un plan sont représentées par les lettres x et y, et les coordonnées d'un point dans l'espace, par x, y, z; dans la méthode des *homogènes*, les coordonnées d'un point sur un plan sont représentées par les rapports $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; et celles d'un point dans l'espace, par les rapports $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$; z et u étant des nombres quelconques. Ainsi, pour passer de la notation ordinaire à celle des homogènes, il suffit de remplacer dans les équations x et y par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, ou bien x, y, z par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$; et il suffit de supposer $z=1$ ou $u=1$ pour venir de la nouvelle notation à l'ancienne. L'avantage de cette nouvelle notation est de donner aux résultats une forme *symétrique* et de pouvoir appliquer aux équations les propriétés analytiques des fonctions homogènes. Nous allons donner quelques exemples. C'est dans l'ouvrage de M. Plucker, contenant son système de géométrie analytique (1835), que je trouve les premières applications de cette méthode.

II. *Problème.* Trouver l'équation d'une droite passant par les deux points $\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right)$ et $\left(\frac{x''}{z''}, \frac{y''}{z''}\right)$.

Solution. Soit $dy + ex + fz = 0$, l'équation de la droite, on aura

$$dy' + ex' + fz' = 0$$
$$dy'' + ex'' + fz'' = 0,$$

Il faut éliminer entre ces trois équations les deux rapports $\frac{d}{f}, \frac{e}{f}$; il faut donc, en considérant d, e, f comme trois inconnues, que le *déterminant* soit nul; ainsi on a de suite

$$y[x'z''] + x[y''z'] + z[y'x''] = 0.$$

Les crochets indiquent le binôme alterné ou le déterminant (*) de deux lettres, le terme entre crochets étant positif; si l'on fait $z = z' = z'' = 1$, on trouve la forme non symétrique ordiuaire.

III. *Problème.* Trouver l'équation d'un plan passant par les trois points $\left(\frac{x'}{u'}, \frac{y'}{u'}, \frac{z'}{u'}\right)$, $\left(\frac{x''}{u''}, \frac{y''}{u''}, \frac{z''}{u''}\right)$, $\left(\frac{x'''}{u'''}, \frac{y'''}{u'''}, \frac{z'''}{u'''}\right)$.

Solution. Soit l'équation du plan $dx + ey + fz + gu = 0$; remplaçant successivement x, y, z, u par x', y', z', u'; x'', y'', z'', u'', on obtient trois autres équations. Entre ces quatre équations, il faut éliminer les trois rapports $\frac{d}{g}, \frac{e}{g}, \frac{f}{g}$. Ces quatre dernières quantités étant considérées comme des inconnues, il faut que le déterminant soit nul; on a donc

$$x[y'z''u'''] + y[x'''z'u''] + z[x''y'''u'] + u[x'y''z'''] = 0.$$

Les crochets indiquant le déterminant de trois lettres,

(*) C'est ainsi qu'on désigne aujourd'hui les *fonctions cramériennes*, nom que, selon toute justice, devraient porter ces fonctions, les plus remarquables qu'on rencontre dans l'analyse.

renferment par conséquent six termes; celui qui est entre les crochets étant positif, les signes des autres sont complétement déterminés.

IV. *Théorème*. Soit une fonction *algébrique, entière, homogène*, de degré m, de n variables, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$; si l'on multiplie par x_1 la dérivée de cette fonction prise par rapport à x_1; puis par x_2, la dérivée de la même fonction prise par rapport à x_2, et ainsi des autres variables; la somme de tous ces produits est *identiquement* égale à m fois la fonction.

Démonstration. Soit $Ax_1^a x_2^b x_3^c \ldots x_n^r = M$, un des termes de cette fonction; on a, d'après la définition de l'homogénéité, $a+b+c \ldots r=m$; A étant un coefficient constant, et a, b, c, r, des exposants entiers positifs, pouvant avoir toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à m; opérant sur ce monôme comme il est énoncé dans le théorème, on a pour résultat mM; donc le théorème subsiste pour l'ensemble des termes.

Observation 1. Le même théorème subsiste encore pour des fonctions algébriques fractionnaires homogènes. En effet, soit F une fonction homogène entière de degré m, de n variables $x_1, x_2 \ldots x_n$; et f une fonction entière de degré m', des mêmes variables; la fonction fractionnaire $\frac{F}{f}$ est de degré $m-m'$; la dérivée par rapport à x_1, multipliée par x_1; donne

$$\frac{x_1\left[f\frac{dF}{dx_1}-F\frac{df}{dx_1}\right]}{f^2};$$

de même pour $x_2, x_3 \ldots$ etc.

Réunissant tous ces résultats, on obtient $(m-m')\frac{F}{f}$.

Observation 2. Le théorème s'applique aussi aux fonctions homogènes irrationnelles.

V. *Problème.* Soit X une fonction algébrique homogène de degré m, de n variables $x_1, x_2 \ldots\ldots x_4$; et soit chacune de ces variables une fonction linéaire de cette forme

$$x_k = a_k x + b_k y + c_k z,$$

a_k, b_k, c_k, étant des constantes données pour chaque variable; et $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, les coordonnées du point d'un plan; alors $X = 0$ (1) est l'équation d'une ligne de degré m; trouver l'équation de la tangente à cette ligne, menée par le point $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ située sur la ligne.

Solution. On a l'identité

$$x_1 \frac{dX}{dx'} + x_2 \frac{dX}{dx_2} + \ldots . x_n \frac{dX}{dx_n} = mX = 0. \quad (2)$$

Représentons par $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ les valeurs que prennent les dérivées $\frac{dX}{dx_1}, \frac{dX}{dx_2} \ldots\ldots$ au point donné et écrivons l'équation

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + \ldots\ldots X_n x_n = 0; \quad (3)$$

C'est l'équation cherchée de la tangente. En effet, $x_1, x_2 \ldots . x_n$ étant des fonctions linéaires, cette équation est celle d'une droite. Si l'on donne aux variables $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ les valeurs qui conviennent au point donné, l'équation (3) rentre dans l'identité (2); donc la droite passe par le point donné; et de ce point, passant au point infiniment voisin, soit sur la courbe, soit sur la droite, on a la même équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots\ldots X_n dx_n = 0;$$

donc cette droite est tangente.

Observation. M. Plucker donne cette belle démonstration dans l'ouvrage cité ci-dessus. Rien n'empêche ceux qui aiment les *limites* de les invoquer. Il est vrai qu'au dernier

instant, à la limite expirante, si l'on peut parler ainsi, on est en plein *infiniment petit*; mais on passe par dessus les yeux fermés. On a bien la chose, mais avec l'avantage de ne pas en prononcer le nom; avantage considérable, qui compense ce que la méthode a de long et de pénible.

VI. *Exemple.* 1° Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dyz+Exz+Fz^2=X=0,$$

l'équation rendue homogène d'une conique, on a pour équation de la tangente

$$y(2Ay'+Bx'+Dz')+x[2Cz+By+Ez]+z[2Fz'+Dy'+Ex']=0;$$

$\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ sont les coordonnées du point de contact; en faisant $z=z'=1$, on a l'équation ordinaire.

2° Soit $px_1x_2+qx_3x_4=X=0$, l'équation d'une conique; p et q des constantes; x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions linéaires de x, y, z; l'équation de la tangente est

$$pX_1x_1+pX_2x_2+qX_3x_3+qX_4x_4=0.$$

X_1, X_2, X_3, X_4, sont les valeurs que prennent les dérivées $\frac{dX}{dx_1}, \frac{dX}{dx_2}$..... etc., au point donné.

Remarque. En 1844, M. Finck a attiré l'attention des professeurs français sur cette manière de représenter les courbes par des fonctions de facteurs linéaires, dont M. Plucker surtout a tiré de si fécondes conséquences (voir *Nouv. Annales*, t. III, p. 147). Les ouvrages du célèbre professeur de Bonn méritent à tous égards les honneurs de la traduction; utile à la science, mais ne servant pas aux examens, qui achèterait cette traduction?

7. *Problème.* Mêmes données qu'au problème 5; mais l'on a $x_k = a_k x + b_k y + c_k z + d_k u$; a_k, b_k, c_k, d_k sont

des constantes; $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ des coordonnées d'un point dans l'espace; $X=0$ représente l'équation d'une surface de degré m; quelle est l'équation du plan tangent mené par le point de la surface, ayant pour coordonnées $\frac{x'}{u'}$, $\frac{y'}{u'}$, $\frac{z'}{u'}$?

Solution. L'équation (3) du problème 5 représente l'équation du plan tangent. Même démonstration.

Observation. Lorsque toutes les quantités X, X_1, $X_2 \ldots X_n$ sont nulles simultanément, l'équation (3) disparaît; c'est le cas des *points singuliers* dont la théorie sera donnée plus loin.

8. *Définition.* Soit $py+qx=1$ l'équation d'une droite mobile, et $F(p, q)=0$ (1) une relation de degré m entre p et q; la droite est évidemment l'enveloppe d'une ligne plane; l'équation (1) est l'équation *enveloppe* de cette ligne; et M. Plucker donne aux variables p, q, le nom de *coordonnées linéaires* pour les distinguer des coordonnées ordinaires, qu'il nomme *coordonnées de point* (Punkt-Coordinaten). On voit que les coordonnées linéaires sont les valeurs réciproques des coordonnées à l'origine de la droite mobile. A une même valeur de p répondent m valeurs de q; donc par un même point passent m tangentes; et la courbe est dite de *m*[ème] *classe*, dénomination introduite par M. Gergonne.

9. *Théorème.* Lorsque l'équation enveloppe est linéaire, l'enveloppe est un point fixe.

Démonstration. Soit $ap+bq=1$ l'équation enveloppe de la droite mobile $py+qx=1$; il est évident que cette droite passe constamment par le point qui a pour coordonnées a et b, car on a $ap+bq=1$.

Observation. Dans le système usité, un point est représenté par deux équations et une droite par une équation; c'est le contraire dans le système des coordonnées linéaires: une

droite est représentée par deux équations, $p=a$, $q=b$, et un point par une équation, $ap+bq=1$.

10. *Problème.* Mêmes données qu'au problème 5 ; l'on a $x_k = a_k p + b_k q + c_k r$; a_k, b_k, c_k sont trois constantes ; $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ sont les *coordonnées linéaires* de la droite mobile $\frac{p}{r}y+\frac{q}{r}x=1$; $X=0$ (1) est l'équation enveloppe d'une courbe de $m^{ème}$ classe ; étant données les coordonnées linéaires $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$, satisfaisant à l'équation $X=0$, trouver l'équation correspondante du point de contact.

Solution. L'équation (3) du problème 5 représente l'équation enveloppe du point de contact. En effet, cette équation est linéaire en p et q ; elle représente donc un point (9) ; et on démontre, comme pour le problème 5, que ce point appartient à deux droites mobiles infiniment voisines.

Observation. L'équation (3) peut se mettre sous la forme $Pp+Qq=1$, P et Q étant des fonctions de $\frac{p'}{r'}$ et de $\frac{q'}{r'}$; donc $x=Q$; $y=P$ sont les coordonnées ordinaires du point de contact ; éliminant $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$ entre ces deux équations et l'équation $X=0$, où p, q, r sont remplacés par p', q', r', on obtient une équation en x, y, qui est celle de l'enveloppe en coordonnées ordinaires.

(*La suite prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN (v. t. VI, p. 327).

—

Trouver la longueur d'une corde divisant la surface d'un cercle donné dans un rapport donné ; construire *géométriquement* l'équation à laquelle on arrive,

Solution. Il suffit de résoudre la question pour un cercle d'un rayon égal à l'unité ; π étant l'aire d'un tel cercle, il s'agit de trouver la corde ; retranchant un segment d'une aire $m\pi$, ou m est un nombre donné qu'on peut toujours supposer moindre que $\frac{1}{2}$; cela posé, soit x l'arc cherché, on aura l'équation

$$2m\pi = x - \sin x.$$

Il se présente trois moyens de résoudre cette équation transcendante :

1° *Par la règle de fausse position.* On cherche dans la table des valeurs *métriques* des arcs une valeur surpassant un peu $2m\pi$, et on en retranche le sinus ; on trouvera facilement la valeur de x à un degré près ; puis à une minute près, etc. ; on devra étudier, pour l'emploi de cette méthode, le chapitre XXII de l'*Introductio in analysin.* Ce chapitre porte pour titre : *Solutio nonnullorum problematum ad circulum pertinentium* ;

2° *Par le retour des séries.* On a

$$2m\pi = -\frac{x^3}{[3]} + \frac{x^5}{[5]} - \text{etc.}$$

On résout ce genre d'équations infinitésimales par la méthode connue sous le nom de *retour des séries* ; on développe x dans une série infinie, procédant suivant les puissances de $2m\pi$.

3° *Par construction.* On construit la courbe transcendante $y = x - \sin x$; il suffit de construire une *sinussoïde* sur la bissectrice $y = x$; la courbe formée d'arcs égaux qui se répètent indéfiniment est renfermée entre cette bissectrice et une tangente parallèle à cette bissectrice ; menant à une distance $2m\pi$ de l'axe des x une parallèle à cet axe, l'abscisse du point d'intersection donne la valeur cherchée de x.

Observation. C'est à tort qu'on a mis dans l'énoncé le mot

géométriquement, car ce mot ne s'applique ordinairement qu'aux problèmes qu'on peut résoudre avec la règle et le compas, ce qui est impossible ici.

Exemples :

$m=\frac{1}{3}$; $x=149°.16'.27''$; corde de cet arc $=1,9285340$.

$m=\frac{1}{4}$; $x=132°.20'.47''$; corde de cet arc $=1,8295422$

(voy. t. V, p. 152).

SOLUTION DU PROBLÈME 173 (t. IV, p. 455),

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

Une droite de longueur déterminée étant divisée en m parties égales par des points rouges, et en n parties égales par des points noirs, trouver la plus petite distance entre un point noir et un point rouge.

On suppose nécessairement m et n premiers entre eux ; s'ils avaient un plus grand commun diviseur d, il y aurait d coïncidences d'un point noir avec un point rouge.

Soit $m<n$; chaque division rouge est $\frac{1}{m}$ de la droite, et chaque division noire en est $\frac{1}{n}$. Du numéro 0 au numéro 1 rouge, il y a autant de divisions noires que d'entiers dans le quotient $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}$, ou dans $\frac{n}{m}$; si $n=mq+r$, il y aura q divisions noires, et entre le $q^{ème}$ numéro noir et le 1er numéro rouge la distance sera la fraction $\frac{r}{mn}$ de la

droite; entre le $2q^{ème}$ numéro noir et le 2ème numéro rouge, la distance $\frac{2r}{mn}$; entre le $mq^{ème}$ numéro noir et le $m^{ème}$ numéro (extrémité de la droite), la distance $\frac{mr}{mn}=\frac{r}{n}$ égale à r divisions noires. Comme n et m, r et m sont premiers entre eux; donc les nombres r, $2r$, $3r$ ... ...$(m-1)r$ divisés par m donneront, dans un ordre quelconque, les restes différents 1, 2, 3 ..... $(m-1)$; la plus petite distance entre un point noir et un point rouge répondra à celui des nombres r, $2r$, ...; $(m-1)r$, qui, divisé par m, donne le reste 1.

Cette plus petite distance est double, car on peut commencer par l'une ou l'autre des extrémités de la droite.

Si $n=m+1$, on a le Vernier; la plus petite distance est entre les deux premières divisions, noire et rouge. Si $n=mq+1$, la plus petite distance a la même position.

Pour $m=13$ et $n=60$, on trouve $r=8$; c'est le nombre $5r$ ou 40 qui, divisé par 13, donne pour reste 1; la plus petite distance est entre le 23ème numéro noir et le 5ème numéro rouge (*).

NOTE

sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique.

PAR M. VANNSON, professeur (Versailles).

—

1. On trouve (tome V, page 17) un article de M. Terquem contenant la proposition suivante : Si on joint les milieux m,n de deux côtés d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 1), qu'à partir du point R, où l'arc mn rencontre le côté

(*) Même question pour la circonférence.

opposé, on prenne RI $=mn$, qu'on achève le triangle rectangle IKR, IK sera le $\frac{1}{2}$ excès. Nous remarquerons d'abord comme corollaire que si on mène un arc perpendiculaire au milieu de BC, l'arc pq sera la mesure de l'angle R ; on aura donc, en appelant S la surface du triangle sphérique :

$$\sin\frac{S}{2}=\sin mn\times\sin pq.$$

Ainsi le sinus de la moitié de la surface d'un triangle sphérique est égal au sinus de l'arc qui joint les milieux de deux côtés, multiplié par le sinus de l'arc élevé perpendiculairement au milieu de la base jusqu'à la rencontre de celui qui joint les deux milieux.

Si dans cette formule on suppose que le rayon de la sphère devienne infini, en conservant aux côtés du triangle des longueurs finies, on devra trouver pour limite la surface du triangle rectiligne. Pour parvenir à ce résultat, je suppose que S représente la longueur de l'arc 2IK, rayon 1. Le rapport de S au quadrant sera donc $\frac{2S}{\pi}$; ce sera en même temps le rapport du triangle proposé au triangle trirectangle. Or ce dernier triangle a pour mesure $\frac{\pi R^2}{2}$, donc la surface du triangle donné sera représentée par SR^2 ; je désigne ce produit par Σ ; j'aurai donc $S=\frac{\Sigma}{R^2}$; je désigne par b et h les longueurs des arcs mn et pq. Pour le rayon R, les arcs semblables à ceux-là pour le rayon 1 seront représentés par $\frac{b}{R}$ et $\frac{h}{R}$. Nous aurons donc pour une valeur quelconque de R l'équation $\sin\frac{\Sigma}{2R^2}=\sin\frac{b}{R}\sin\frac{h}{R}$. On peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\Sigma.\frac{\sin\left(\frac{\Sigma}{2R^2}\right)}{\left(\frac{\Sigma}{2R^2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{b}{R}\right)}{\left(\frac{b}{R}\right)}.\frac{\sin\left(\frac{h}{R}\right)}{\left(\frac{h}{R}\right)}.bh.$$

Si maintenant on suppose R infini, on aura $\Sigma=2bh$, ce qu'il fallait trouver.

II. On peut, en partant du même principe, démontrer sans le secours du calcul cette formule que donne Legendre :

$$\sin\frac{S}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Pour cela, soit ABC (*fig.* 2) un triangle, *o*D une perpendiculaire menée à son plan par le centre du cercle circonscrit ; concevons une sphère ayant son centre en D, et soit A'B'C' la projection centrale du triangle ABC sur cette sphère, *m'*, *n'* les projections des points M et N, milieux de AB et de AC ; cherchons le volume de la pyramide DABC ; elle équivaut évidemment à quatre fois la pyramide DMNA ; or cette dernière a pour mesure le triangle DMN, multiplié par le $\frac{1}{3}$ d'une perpendiculaire abaissée du point A sur le plan DMN ; mais le triangle

$$DMN=\frac{DM.DN\sin m'n'}{2}=\frac{DA.^2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin M'N'}{2},$$

et la perpendiculaire abaissée du point H sur le plan

$$DMN=DA.\sin R=DA.\cos\frac{a}{2}\sin R;$$

donc $$V=\frac{2DA.^3}{3}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin m'n'\sin R;$$

mais $$\sin m'n' \sin R = \sin \frac{S}{2};$$

donc $$V = \frac{2DA^3}{3} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \sin \frac{S}{2}.$$

Mais on connaît une autre expression de ce même volume, savoir :

$$\frac{DA^3}{3} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)};$$

donc $$\sin \frac{S}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}.$$

Remarque. Si on divise cette équation membre à membre par celle qui donne

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)},$$

on trouvera

$$\sin \frac{S}{2} = \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A}{\cos \frac{a}{2}}.$$

Quand on fait $r = \infty$, on retrouve la formule

$$S = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Cette dernière formule

$$\sin \frac{S}{2} = \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A}{\cos \frac{a}{2}},$$

peut aussi se démontrer par la méthode des projections centrales. En effet, si on se reporte à la figure précédente, on voit que le volume de la pyramide a encore pour mesure le

triangle ABD multiplié par le $\frac{1}{3}$ de la hauteur du point C au-dessus du plan de ce triangle. Or le triangle

$$\text{ABD} = \frac{\text{AD}^2 \sin c}{2}$$

et la hauteur $=$ AD$\sin b \sin$A ; donc

$$\text{D} = \frac{1}{6}\,\text{AD}^3 \sin c \sin b \sin \text{A}\,;$$

mais déjà

$$\text{V} = \frac{2\text{DA}^3}{3} \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{\text{S}}{2};$$

donc
$$\frac{\text{S}}{2} = \frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\text{A}}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Si on appelle h la hauteur du triangle tombant sur le côté c, on aura $\sin\text{A} = \frac{\sin h}{\sin b}$;

d'où
$$\sin\frac{\text{S}}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}\sin h}{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}}.$$

III. On démontre dans la géométrie plane que le produit des trois côtés d'un triangle $=$ 4 fois sa surface par le rayon du cercle circonscrit. Nous allons chercher le théorème analogue dans le triangle sphérique, à l'aide de la construction ci-dessus employée.

Le volume de la pyramide DABC est égal à $\frac{\widehat{\text{ABC}}.\text{Do}}{3}$; mais si on prend DA pour unité et qu'on désigne par ρ la distance polaire du cercle circonscrit au triangle A'B'C', on aura $\text{Do} = \sin\rho$, donc

$$V = \frac{\widehat{ABC}.\sin\rho}{3};$$

mais déjà on a trouvé

$$V = \frac{2}{3}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{S}{2};$$

donc
$$\widehat{ABC} = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{S}{2}}{\sin\rho};$$

donc l'équation AB.AC.BC $=$ 2.D.$\widehat{ABC}$, devient en y remplaçant $\widehat{ABC}$ par cette valeur et AB... par $2\sin\frac{c}{2}$, etc....

$$2\tang\frac{a}{2}\tang\frac{b}{2}\tang\frac{c}{2} = \tang\rho.\sin\frac{S}{2},$$

d'où, en ayant égard à la valeur trouvée pour $\sin\frac{S}{2}$, on tire :

$$\tang\rho = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

On aurait encore pu remplacer $\sin\frac{S}{2}$ par

$$\frac{\sin\frac{c}{2}\sin h}{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}};$$

alors on aurait eu

$$2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\ \tang\rho\sin h\cos\frac{c}{2};$$

si on fait $r = \infty$, on retrouve le théorème : Le produit de deux côtés d'un triangle égale le diamètre du cercle circonscrit, multiplié par la hauteur relative au 3[e] côté.

IV. *Problème.* Connaissant les trois côtés d'un triangle

sphérique, trouver les distances polaires des cercles inscrits et ex-inscrits.

Soit O, *fig.* 3, le pôle du cercle inscrit, r sa distance polaire, on a dans le triangle rectangle AOC' :

$$\operatorname{tang} r \sin AC'.\operatorname{tang}\frac{A}{2};$$

mais AC' est égal à $p-a$; p désignant le $\frac{1}{2}$ périmètre et

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}};$$

on a donc

$$\operatorname{tang} r=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)\sin p-a)}{\sin p}}.$$

On trouve des formules analogues pour les rayons des cercles ex-inscrits $r'r''r'''$, et par suite, on a la relation

$$\operatorname{tang} r.\operatorname{tang} r'.\operatorname{tang} r''\operatorname{tang} r'''=$$
$$=\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

et
$$\operatorname{tang} r:\operatorname{tang} r':\operatorname{tang} r'':\operatorname{tang} r''':: $$
$$::\frac{1}{\sin p}:\frac{1}{\sin(p-a}:\frac{1}{\sin(p-b)}:\frac{1}{\sin(p-c)};$$

mais on peut remplacer le produit simplifié

$$\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$$

par
$$4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{S}{2};$$

on aura donc

$$\operatorname{tang}\rho.\operatorname{tang}\rho'.\operatorname{tang}\rho''.\operatorname{tang}\rho'''=$$
$$=4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{S}{2}.$$

Enfin, ou par une des formules ci-dessus démontrées

$$\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}=\frac{\sin a\sin h}{2};$$

donc $$\operatorname{tang} r . \operatorname{tang} r' . \operatorname{tang} r'' . \operatorname{tang}''' = \frac{\sin^2 a \sin^2 h}{4}.$$

C'est-à-dire que le produit des tangentes des distances polaires des cercles inscrits et ex-inscrits est égal au demi-produit du sinus de la base par le sinus de la hauteur, élevé au carré.

(*La suite prochainement.*)

THÉORÈME

sur les cercles osculateurs dans les coniques.

Par tout point d'une conique passent quatre cercles osculateurs; les quatre points d'osculation sont sur une même circonférence. (Steiner.)

1. Lemme. Soient

$Ay^2+Cx^2+Dy+Ex+F=0$; $Ay^2-Cx^2+D'y+E'x+F'=0$

les équations des deux coniques ; les axes coordonnés étant parallèles aux axes principaux, les points d'intersection des deux coniques sont sur une même circonférence.

Démonstration. Les deux équations donnent celles-ci :

$$2Cx^2+y(D-D')+x(E-E')+F-F'=0,$$
$$2Ay^2+y(D+D')+x(E+E')+F+F'=0;$$

d'où

$$2ACy^2+2ACx^2+y\,[D(A+C)+D'(C-A)]+$$
$$+x[E(A+C)+E'(C-A')]+F(A+C)+F'(C-A)=0,$$

équation d'un cercle.

Observation. Si $C=0$, le cercle devient une droite.

Observation. Le lemme renferme cet énoncé géométrique: lorsqu'une hyperbole et une ellipse ont leurs axes princi-

paux parallèles, les points d'intersection sont sur une même circonférence.

II. Soit $Ay^2+Cx^2+Dy+Ex=0$ l'équation d'une conique, les axes coordonnés parallèles aux axes principaux; et soient x', y' les coordonnées d'un point d'osculation d'un cercle qui passe par l'origine; la droite qui passe par le point et l'origine a pour équation $yx'=xy'$, et la tangente en ce point a pour équation

$$y(2Ay'+D)+x(2Cx'+E)+Dy'+Ex'+2F=0;$$

ces deux droites sont également inclinées sur les axes principaux; donc

$$\frac{2Cx'+E}{2Ay'+D}=\frac{y'}{x'}; \text{ d'où } 2Ay'^2-2Cx'^2+Dy'-Ex'=0;$$

et l'on a aussi

$$2Ay'^2+2Cx'^2+2Dy'+2Ex'=0;$$

donc, d'après le lemme, les quatre points d'intersection sont sur une même circonférence. Tm.

EXPRESSION

de chaque racine des équations du 2ème, 3ème et 4ème degré en fonction symétrique de toutes les racines.

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Crelle, t. XIII, p. 340. 1835, en latin.)

La résolution algébrique des équations exige que chaque racine (*) puisse être exprimée en fonction symétrique de

(*) L'auteur, dans tout le cours de ce travail, désigne les racines par le mot *elementa*. En effet les coefficients sont des combinaisons dont les racines sont les *éléments*.

toutes les racines. On sait que cela est possible pour les équations du 2ème, 3ème et 4ème degré; mais comme ces fonctions symétriques ne sont pas indiquées dans les ouvrages élémentaires, je vais les exposer brièvement.

Résolution des équations du 2ème degré.

Les racines étant a et b, chacune est exprimée par la formule

$$\frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2}.$$

Résolution des équations du 3ème degré.

Les trois racines étant a, b, c, posons :

$$a+b+c=u;\quad a+\alpha b+\alpha^2 c=u';\quad a+\alpha^2 b+\alpha c=u'';$$

α et α^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité ; d'où l'on tire

$$a=\frac{u+u'+u''}{3};\quad b=\frac{u+\alpha^2 u'+\alpha u''}{3};\quad c=\frac{u+\alpha u'+\alpha^2 u''}{3};$$

faisons

$$u'=(v+\sqrt{w})^{\frac{1}{3}};\quad u''=(v-\sqrt{w})^{\frac{1}{3}};$$

d'où

$$v=\frac{u'^3+u''^3}{2}=\frac{(u'+u'')(u'+\alpha u'')(u'+\alpha^2 u'')}{2}$$

$$\sqrt{w}=\frac{u'^3-u''^3}{2}=\frac{(u'-u'')(u'-\alpha u'')(u'-\alpha^2 u'')}{2};$$

remplaçant u' et u'' par leurs valeurs, il vient

$$v=\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)}{2}$$

$$\sqrt{w}=\frac{3\sqrt{-3}}{2}(a-b)(a-c)(b-c)=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{-3(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2};$$

u, u', u'' sont donc exprimés en fonction symétrique des racines, et par conséquent aussi les racines a, b, c (*).

On a

$$u'u'' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$$
$$= \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} = (v^2 - w)^{\frac{1}{3}};$$

mettant à la place de v et de w les valeurs trouvées, on obtient une identité remarquable.

Résolution des équations du 4ème degré.

Soient a, b, c, d les quatre racines.

Posons

$$a+b+c+d = u;\ a+b-c-d = u';\ a-b+c-d = u'';$$
$$a-b-c+d = u''';$$

d'où

$$a = \frac{u+u'+u''+u'''}{4};\ b = \frac{u+u'-u''-u'''}{4};$$
$$c = \frac{u-u'+u''-u'''}{4};\ d = \frac{u-u'-u''+u'''}{4}.$$

Dans les formules relatives à la résolution des équations du 3ème degré, remplaçons a, b, c respectivement par u'^2, u''^2, u'''^2, on obtient

$$2v = (2u'^2 - u''^2 - u'''^2)(2u''^2 - u''''^2 - u'^2)(2u'''^2 - u'^2 - u''^2)$$
$$2\sqrt{w} = 3\sqrt{-3}\,(u'^2 - u''^2)(u'^2 - u'''^2)(u''^2 - u'''^2);$$

or,

$$u'^2 - u''^2 = (i' + u'')(u' - u'') = 4(a-d)(b-c)$$
$$u'^2 - u'''^2 = (u' + u''')(u' - u''') = 4(a-c)(b-d)$$
$$u''^2 - u'''^2 = (u' + u'')(u' - u''') = 4(a-b)(c-d);$$

ensuite

$$2u'^2 - u''^2 - u'''^2 = 8(ab+cd) - 4(ac+bd) - 4(ad+bc)$$
$$2u''^2 - u'''^2 - u'^2 = 8(ac+bd) - 4(ad+bc) - 4(ab+cd)$$
$$2u'''^2 - u'^2 - u''^2 = 8(ad+bc) - 4(ab+cd) - 4(ac+bd);$$

(*) Nous supprimons le développement, que chacun peut écrire.

posons de plus

$$s = u'^2 + u''^2 + u'''^2,$$

la résolution ci-dessus des équations du 3ème degré donne

$$4a = u + \sqrt{\frac{s + \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}}$$

$$+ \sqrt{\frac{s + \alpha \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha^2 \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}}$$

$$+ \sqrt{\frac{s + \alpha^2 \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}},$$

et de même $4b$, $4c$, $4d$.

Or

$$s = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

$$v = 32[2(ab+cd) - (ac+bd) - (ad+bc)]$$
$$[2(ac+bd) - (ad+bc) - (ab+cd)]$$
$$[2(ad+bc) - (ac+bd) - (ad+bc)$$
$$w = -3[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2;$$

u, s, w étant donc des fonctions symétriques des racines, on satisfait à la question. On a

$$\sqrt[3]{(v + \sqrt{w})(v - \sqrt{w})} = \sqrt[3]{v^2 - w} =$$
$$= u'^4 + u''^4 + u'''^4 - u'^2 u''^2 - u'^2 u'''^2 - u''^2 u'''^2$$
$$= 8[(a-b)^2 (c-d)^2 + (a-c)^2 (b-d)^2 + (a-d)^2 (b-c)^2]$$

$$\left[s + \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \sqrt[3]{s - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left[s + \alpha \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha^2 \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left[s + \alpha^2 \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (s^3 + 2v - 3\sqrt[3]{v^2 - w})^{\frac{1}{2}} = uu'u'' =$$
$$= (a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

Ces expressions étant symétriques par rapport aux racines, on voit que deux racines *cubiques* peuvent s'exprimer l'une par l'autre, et des trois racines *quadratiques*, que nous avons désignées par u', u'', u''', une peut se déterminer par les deux autres. A l'aide de cette observation, on voit comment cette grande ambiguïté de radicaux ne représente pourtant que quatre quantités diverses.

Considérations générales.

Si nous examinons attentivement la composition des expressions qui représentent les quatre racines, nous voyons qu'il faut d'abord extraire la racine carrée d'une fonction symétrique des racines ($\sqrt{w}$), et extraire la racine cubique de celle-ci, jointe à une autre fonction symétrique (v), et ensuite réunir celle-ci à une semblable racine cubique ; ajouter à ce résultat une troisième fonction symétrique (s), et extraire la racine carrée du tout ; formant trois semblables racines quadratiques et les réunissant à une quatrième fonction symétrique u, on obtient les quatre racines. Ces extractions de racines ne peuvent être qu'indiquées si les quantités sous les radicaux sont exprimées en coefficients de l'équation du quatrième degré, à laquelle ces racines appartiennent ; mais si les quantités sous les radicaux sont exhibées en fonction de racines elles-mêmes, comme nous avons fait, alors nous voyons que les extractions deviennent possibles, et amènent successivement à diverses fonctions non symétriques des racines jusqu'à ce qu'on parvienne à chaque racine en particulier.

On voit que dans ces questions il faut commencer par chercher des fonctions non symétriques, lesquelles, élevées à certaines puissances, deviennent symétriques ; car on ne peut pas autrement parvenir à des fonctions non symétri-

ques, par des extractions de racines opérées sur des fonctions symétriques. Mais il n'y a d'autres fonctions de ce genre que le produit formé des différences des racines, et tel qu'en permutant les racines on obtient deux valeurs de signes opposés, et le carré de ce produit donne alors une fonction symétrique. Ainsi dans les solutions précédentes le dernier radical doit surmonter et surmonte en effet un carré ; donc ce radical doit être quadratique ; c'est ce qui résulte aussi de la considération suivante.

Supposons les coefficients de l'équation fonctions d'une quantité t, et soit x la racine ; l'équation peut s'écrire $F(x, t)=0$; d'où $\frac{dx}{dt}=-\frac{F'(t)}{F'(x)}$. Si l'équation a deux racines égales, et que nous les prenions pour x, $\frac{dx}{dt}$ devient infini. Si donc x peut s'exprimer en t à l'aide de radicaux, l'expression doit être ainsi formée que la différentiation amène un dénominateur qui s'évanouisse toutes les fois que deux racines deviennent égales, ce qui n'est autrement possible que lorsque ce dénominateur est formé du carré du produit des différences de toutes les racines de l'équation. Ainsi le carré doit se trouver, dans ces expressions, seul sous le radical, sans être joint par addition à d'autres quantités ; en d'autres termes, il doit être le radical ultime, ainsi que nous l'avons vu dans la résolution algébrique des équations du 2ème, 3ème et 4ème degré.

On a souvent fait l'observation que si on donne la résolution algébrique d'une équation du $n^{ème}$ degré, aucune relation n'existant entre les racines, l'expression des racines doit impliquer nécessairement tant de radicaux qu'elles puissent convenir aussi aux solutions des équations de degré inférieur ; de là on est facilement porté à conjecturer que le nombre des dimensions auquel monte l'expression renfermée sous le radical

ultime (w), ne peut être moindre que le plus petit multiple des nombres 2, 3, 4...n ; pour $n=2, 3, 4$, ce plus petit multiple est 2, 6, 10, et c'est aussi dans ces cas, le nombre des dimensions du carré du produit des différences des racines qu'on trouve sous le radical ultime; mais pour $n=5$, le moindre multiple est 60, pendant que le nombre des dimensions du carré est seulement de 20 et monte en général au nombre $n(n-1)$; cet accord manque aussi pour des nombres supérieurs à 5.

DÉMONSTRATION

d'un théorème de M. Gauss sur le pentagone
(Question 162, VI, p. 276).

PAR M. PAUL SERRET.

Théorème I. ABCDE étant un pentagone plan quelconque, représentons par α, β, γ, δ, ε les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, et par S la surface du pentagone, on aura :

$$S^2-S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=0. \quad (1)$$

Démonstration. Nous nous appuierons sur le théorème connu de Fontaine sur le quadrilatère (VI, 71). Considérons en effet le quadrilatère BCDE et le point A sur son plan, on aura, d'après le théorème cité :

$$\varepsilon.\ ACD+\alpha\delta=ABD.\ ACE. \quad (A)$$

Or l'on a :

$$ACD=S-(\alpha+\delta);\ ABD=S-(\beta+\delta);\ ACE=S-(\alpha+\gamma);$$

remplaçant dans (A), l'on aura :

$$\varepsilon[S-\alpha-\delta]+\alpha\delta=[S-(6+\delta)]\,[S-(\alpha+\gamma)],$$

d'où :

$$S^2-S(\alpha+6+\gamma+\delta+\varepsilon)+(\alpha+\gamma)(6+\delta)-\alpha\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha,$$

ou simplifiant :

$$S^2-S(\alpha+6+\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha6+6\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=0. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème II. ABCDE étant un pentagone plan, si l'on appelle α', $6'$, γ', δ', ε', les surfaces des quadrilatères ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC, et S la surface du pentagone, on aura encore :

$$S^2-S(\alpha'+6'+\gamma'+\delta'+\varepsilon')+\alpha'6'+6'\gamma'+\gamma'\delta'+\delta'\varepsilon'+\varepsilon'\alpha'=0. \quad (2)$$

Démonstration. On le démontre facilement en remplaçant, dans la relation (1), chacune des quantités α, 6, γ, δ, ε par la différence entre S surface du pentagone et l'une des aires α', $6'$, γ', δ', ε' convenablement choisie ; ce qui donne une relation entre S et α', $6'$, γ', δ', ε' qui, simplifiée, est précisément la relation (2).

Remarque. Si le pentagone devient quadrilatère ABCD, en nommant α, 6, γ les aires des triangles ABC, BCD, CDA, et S la surface du quadrilatère, la relation (1) est remplacée par celle-ci :

$$(3) \qquad S^2-S(\alpha+6+\gamma)+\alpha6+6\gamma=0,$$

relation que l'on peut d'ailleurs vérifier directement en résolvant la relation (3) par rapport à S.

NOTE

sur le développement de e^α en série.

PAR M. BRASSINNE.

1° Le développement de l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ se met sous la forme :

$$(1)\ldots\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3\alpha}{4}\right)+\text{etc., etc...}$$

Si la quantité α devient infiniment petite, il sera nécessaire de prouver rigoureusement qu'on peut la négliger dans le second membre, parce que les facteurs binômes devenant en nombre infini, leur produit pourrait donner pour coefficients de α des quantités assez grandes pour compenser la petitesse de ce facteur ; d'où il résulterait que la série du second membre, qui a évidemment pour limite supérieure

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots\text{ etc.},$$

vaudrait moins que cette quantité. Pour lever cette difficulté, on peut faire usage d'un procédé applicable à d'autres cas, et qui est fondé sur le lemme suivant.

Lemme. 1° Si on multiplie entre eux deux polynômes $a-b\alpha+c\alpha^2-\ldots$, $a'-b'\alpha+c'\alpha^2-\ldots$, ordonnés par rapport aux puissances ascendantes de α, et dont les termes sont alternativement positifs ou négatifs, on obtiendra un produit $a''-b''\alpha+c''\alpha^2-\ldots$ de même forme. Si de plus on aug-

montait sans changer leurs signes, les coefficients a, b, c, ... a', b', c', ..., tous les termes du produit seraient augmentés ; enfin si on réunissait dans une même somme plusieurs produits semblables au précédent, cette somme de la forme $A - B\alpha + C\alpha^2$ ... aurait des coefficients d'autant plus grands que ceux des divers produits seraient plus grands.

2° Si les termes d'une suite $a - bx + cx^2 - ...$ indéfinie peuvent devenir aussi petits que l'on voudra, en multipliant cette suite par un polynome $a' - b'\alpha + c'\alpha^2 ... \pm h'x^{m-1}$ d'un nombre fini de termes, on obtiendra un produit $a'' - b''x + c''\alpha^2 ...$ dont chaque terme pourra devenir aussi petit que l'on voudra. Cela tient à ce que m quantité infiniment petites, ε, ε', ε'' multipliées par des quantités finies ou infiniment petites, p, q, r, s ... donnent une somme

$$p\varepsilon + q\varepsilon' + r\varepsilon'' + ...$$

aussi petite que l'on veut.

Cela posé, les termes du second membre de la suite (1) après les deux premiers, sont moindres que $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)$, $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2$, $\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^3$, etc... ; leur somme aura pour limite supérieure :

$$2 + \left(\frac{2}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2 + ... = 2 + \frac{\frac{2}{3} - \alpha}{1 - \frac{2}{3} + \alpha} =$$

$$= 2 + 2 - 3(3\alpha) + 3(3\alpha)^2 - 3(3\alpha)^3 + ... ;$$

3α pouvant devenir très-petit, les termes successifs de cette suite peuvent devenir aussi faibles qu'on voudra, et être décroissants. Mais la suite (1) étant composée de produits tout à fait analogues à ceux que donnent les divers termes de la progression, les termes en α, α^2 ... de cette suite sont limités par $-3(3\alpha)$, $3(3\alpha)^2$ ... qui peuvent devenir aussi petits que l'on voudra et dont la somme algébrique sera aussi nulle ,

puisqu'elle forme une série décroissante et alternée de signes; d'où résulte que dans le cas de α infiniment petit, on trouve :

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$$

On aurait obtenu une limite supérieure bien plus rapprochée du second membre de l'équation (1) et de ses termes successifs, en remarquant que les binômes entre parenthèses sont tous limités par $\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)$, δ étant une quantité finie très-petite; d'où il résulterait que ce second membre et chacun de ses termes auraient pour limites le développement

$$2+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^2+\ldots$$

La série

$$\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)^p+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^p\left(\frac{1}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)^p\left(\frac{1}{4}-\frac{3\alpha}{4}\right)^p+\ldots \qquad (2)$$

serait limitée pour son ensemble et ses termes par la somme et les termes de la progression

$$\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^p+\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)^{2p}+\ldots$$

Mais cette progression est une partie de la progression dont le premier terme et la raison sont $\left(\frac{1}{2}+\delta-\alpha\right)$; d'où il résulte que les termes de cette dernière servent de limite à ceux de la suite (2), qui se réduit pour δ infiniment petit à

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{(2.3)^p}+\frac{1}{(2.3.4)^p}+\text{etc.}\ldots$$

2° Considérons l'expression

$$(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=1+x+x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+x\left(\frac{x}{2}-2\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}\right),$$

supposons la suite prolongée jusqu'à un terme tel que x soit plus petit que m, la suite à partir de $m+1$ terme aura pour expression :

$$x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2\alpha}{3}\right)\cdots\left(\frac{x}{m}-\frac{(m-1)\alpha}{m}\right)$$

$$\left[1+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+2}-\frac{(\overline{m+1})\alpha}{m+2}\right)+\ldots\right];$$

en augmentant $\frac{x}{m+1}$ d'une quantité finie très-petite δ, on formera une progression qui aura pour premier terme et pour raison $\frac{x}{m+1}+\delta-\alpha$, et qui limitera

$$1+\left(\frac{x}{m+1}-\frac{m\alpha}{m+1}\right)+\ldots;$$

donc pour α infiniment petit, tous les termes en α, α^2, ... seront aussi faibles qu'on voudra ; le produit de cette suite par le polynôme $x\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(\frac{x}{m}-\frac{\overline{m-1}\alpha}{m}\right)$ d'un nombre fini de termes, ne produira que des termes en α négligeables ; comme d'ailleurs on peut négliger cette quantité dans les m premiers termes qui n'ont qu'un nombre limité de facteurs, il résulte que $(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$

M. Liouville avait déjà démontré rigoureusement, dans le *Journal de mathématiques*, t. V, p. 280, que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ lorsque α est infiniment petit. Le procédé qu'il emploie est aussi simple que possible. Les considérations précédentes, qui n'exigent que la formation de progressions géométriques, peuvent s'appliquer à d'autres cas.

THÉORÈME DE STATIQUE.

PAR E. CATALAN.

—

Pour que quatre forces, P, Q, S, T, *situées ou non situées dans un même plan, mais non appliquées en un même point, se fassent équilibre, il faut et il suffit :*

1° *Que deux de ces forces, par exemple les forces* P *et* Q, (fig. 4) *soient représentées en grandeur et en direction par les deux côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère ;*

2° *Que les deux autres forces*, S *et* T, *soient représentées par des droites respectivement égales et parallèles aux deux autres côtés* AD, BC *de ce quadrilatère ;*

3° *Que les directions de ces deux dernières forces rencontrent les côtés* BC, AD *en des points* E, F, *tels que l'on ait*

$$\frac{BE}{CE}=\frac{DF}{AF};$$

4° *Enfin que les forces* P *et* Q *agissent en sens contraires, et qu'il en soit de même pour les forces* S, T.

Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord qu'avec les deux droites AB, CD, qui représentent en grandeur et en direction deux forces données P, Q, agissant en sens contraires, on construise un quadrilatère ABCD. Je dis que si, en un point quelconque E, du côté BC, on applique une force S, représentée en grandeur et en direction par la droite EH, égale et parallèle à AD, les trois forces P, Q, S auront une résultante unique.

Appliquons aux points B, C, deux forces S′, S″, parallèles à S, et telles que l'on ait

$$S' = S\frac{CE}{BC},\quad S'' = S\frac{BE}{BC};$$

elles pourront tenir lieu de la force S.

Les deux forces P et S′, appliquées en B, auront une résultante unique R′, située dans le plan DAB, et dont la direction rencontrera AD en un point F, déterminé par la proportion $\frac{AF}{AB} = \frac{S'}{P}$; donc, à cause de AB=P, l'on aura

$$AF = S'.$$

De la même manière, la résultante R″ des deux forces Q et S″ rencontre AD en un point F′, déterminé par la relation

$$DF' = S''.$$

On conclut, de ces deux valeurs, AF+DF′=S=AD; c'est-à-dire que les points F et F′ se confondent, et que les forces R′, R″ ont une résultante R, dont la direction rencontre AD en un point F, qui divise cette droite AD en deux parties AF, DF, inversement proportionnelles à BE, CE.

Pour obtenir la grandeur et la direction de R, il suffit d'observer que les forces R′, R″, étant représentées en grandeur et en direction par les droites FB, FC, leur résultante R sera représentée par une droite égale et parallèle à BC. Cette force R, résultante des forces P, Q, S, est donc égale et directement opposée à la force T; donc les quatre forces P, Q, S, T se font équilibre. La condition énoncée est donc suffisante.

Afin de faire voir que cette condition est nécessaire, supposons qu'étant donné un quadrilatère ABCD (*fig.* 5), dans lequel les deux côtés AB, CD représentent en grandeur et en direction deux forces données P, Q, on applique une force S, égale et parallèle à celle qui serait représentée par

AD, mais de manière que la direction de cette force S ne rencontre pas le côté BC. Je dis que les forces P, Q, S ne pourront pas se réduire à une force unique.

Menons une droite GH, qui rencontre en G, H, E les directions des forces Q, P, S ; projetons la figure sur le plan BAD, à l'aide des droites parallèles à AD ; la direction de la force S rencontre G'H en un point E' non situé sur BC'.

Cela posé, si nous reprenons les décompositions de tout à l'heure, nous obtiendrons :

$$AF = AH \cdot \frac{S}{P} \cdot \frac{G'E'}{G'H}, \quad BF' = DG \cdot \frac{S}{Q} \cdot \frac{HE'}{G'H}.$$

Si les points F et F' se confondaient, on trouverait, en ajoutant ces deux valeurs :

$$G'H = \frac{AH}{P} \cdot G'E' + \frac{DG}{Q} \cdot HE'.$$

Mais, K' étant le point de rencontre de G'H avec BC', on a :

$$G'H = \frac{AH}{P} \cdot G'K' + \frac{DG}{Q} \cdot K'H;$$

retranchant membre à membre, on obtient :

$$0 = \frac{AH}{P} \cdot E'K' - \frac{DG}{Q} E'K',$$

ou encore

$$\frac{AH}{AB} = \frac{DG'}{DC'}.$$

Or, cette proposition est absurde tant que les droites BC', HG' se coupent. Et si elles étaient parallèles, on démontrerait encore plus facilement que nous ne venons de le faire, que les forces P, Q, S n'ont pas de résultante unique.

Le théorème est donc démontré.

(*Juin* 1846.)

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS

de l'équation $x^2+y^2=z^2+t^2$.

PAR M. LEBESGUE.

Un facteur carrés commun à trois des termes x^2, y^2, z^2, t^2 de l'équation

$$x^2+y^2=z^2+t^2, \qquad (a)$$

doit disparaître par la division ; cela fait, on reconnaît de suite que des quatre nombres x, y, z, t, il y en a deux pairs, quand ils ne sont pas tous impairs ; on pourra donc poser, v, q, r, s étant des nombres entiers positifs ou négatifs :

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=2p \\ x+y-z-t=2q \\ x-y+z-t=2r \\ -x+y+z-t=2s \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} 2x=p+q+r-s \\ 2y=p+q-r+s \\ 2z=p-q+r+s \\ 2t=p-q-r-s \end{array}\right.$$

La substitution dans l'équation (a) donne

$$pq=rs;$$

de là $s=\frac{pq}{r}$.

Comme s doit être entier, si R est le plus grand commun diviseur de p et r, et qu'on ait $p=\mathrm{PR}$, $r=\mathrm{R}\rho$, il en résultera $s=\frac{\mathrm{P}q}{\rho}$; et comme P, ρ sont premiers entre eux, il faudra poser $q=\mathrm{Q}\rho$, d'où $s=\mathrm{PQ}$.

Ainsi on aura, en substituant pour p, q, r, s, leurs valeurs PR, Qρ, Rρ, PQ :

$$2x = P(R-Q) + \rho(R+Q),\quad 2y = P(R+Q) - \rho(R-Q)$$
$$2t = P(R-Q) - \rho(R+Q),\quad 2z = P(R+Q) + \rho(R-Q).$$

On tire de là

$$2(x^2+y^2) = (P^2+\rho^2)(Q^2+R^2).$$

Pour que le second membre soit divisible par 2, il faut que dans un au moins des facteurs binômes $P^2+\rho^2$, Q^2+R^2, les deux termes soient tous deux pairs ou tous deux impairs. Si le binôme $P^2+\rho^2$ remplit cette condition, en vertu de

$$\frac{P^2+\rho^2}{2} = \left(\frac{P+\rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{P-\rho}{2}\right)^2 = Q_1^2+R_1^2,$$

il viendra

$$x^2+y^2 = (Q_1^2+R_1^2)(Q^2+R^2).$$

Ainsi $x^2+y^2 = z^2+t^2 = A$ est un nombre composé.

Si cependant on avait $R_1=0$, $Q_1=1$, ce qui suppose $P=\rho=1$, on n'aurait plus que

$$x^2+y^2 = Q^2+R^2,$$

qui peut être premier, mais alors

$$x=R,\ y=Q,\ z=R,\ t=-Q;$$

on n'a plus réellement qu'une seule décomposition de A en deux carrés.

Théorème. Tout nombre A qui peut être mis de deux manières sous la forme f^2+g^2 est nécessairement non premier.

Remarque. Tout nombre qui ne peut être mis qu'une seule fois sous la forme f^2+g^2 est premier. La démonstration présente plus de difficulté.

Problème. Résoudre l'équation $x^2+y^2=z^2$.

On fera $t=0$; de là, $P(R-Q)=\rho(P+Q)$, l'élimination de ρ conduit à la solution

$$(R^2-Q^2)^2 + (2QR)^2 = (R^2+Q^2)^2.$$

Il suffit d'omettre un facteur commun aux nombres x, y, z.

Problème. Résoudre $x^2+y^2=2z^2$?

Il faut poser $z=t$, de là, $R\rho+PQ=0$; en éliminant ρ et omettant un facteur commun, on trouve

$$x=R^2-2QR-Q^2,$$
$$y=R^2+2QR-Q^2,$$
$$z=R^2+Q^2.$$

Problème. Résoudre $x^2+y^2=2(z^2+t^2)$.

Comme x et y doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs, on aura

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=z^2+t^2.$$

On est ramené au premier problème.

Problème. Résoudre l'équation $x^2+y^2+z^2=t^2$ en nombres entiers.

DISCUSSION

d'une surface du 4ème degré, donnant une valeur approchée du radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'après M. Poncelet (Crelle, t. XIII, p. 277. 1835, en français).

—

I. Soit $(z+1)^2(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ l'équation d'une surface du quatrième degré.

1° Faisant $x=y=0$, on a $z=\frac{0}{0}$; donc l'axe des z est sur la surface;

2° Tout plan parallèle au plan xy rencontre la surface suivant deux droites, qui se coupent sur l'axe des z; donc la surface est engendrée par une droite qui se meut suivant

une certaine loi le long de l'axe des z, parallèlement au plan xy;

3° On a $\frac{y}{x}=\frac{ab\pm(z+1)\sqrt{a^2+b^2-(1+z)^2}}{(z+1)^2-b^2}=\text{tang}\,\varphi.$

Ainsi, à une même valeur de z répondent deux valeurs de φ, qui donnent deux droites conjuguées. Les deux se réunissent en une seule, lorsque $z=-1$; alors tang $\varphi=-\frac{a}{b}$; et lorsque $z=-1\pm\sqrt{a^2+b^2}$, alors $\text{tang}\,\varphi'=\frac{b}{a}$; prises positivement, ces deux dernières valeurs de z sont des maximums;

4° On a $z=-1\pm(a\cos\varphi+b\sin\varphi)$; lorsque $\varphi=0$, $z'=-1\pm a$; si l'on veut que z et z' soient conjugués, l'on doit poser

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=a\,,\ \text{d'où}\ \frac{b}{a}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\cot\frac{1}{2}\varphi$$

ainsi $\text{tang}\,\varphi'<\text{tang}\,\varphi$; $\varphi'<\varphi$;

5° a et b diminuant, z' et z'' augmentent négativement, et par conséquent diminuent étant pris positivement, la plus grande diminution ayant lieu lorsque ces valeurs atteignent le maximum Z; on doit donc poser

$$1-a=1-a\cos\varphi-b\sin\varphi=-1+\sqrt{a^2+b^2};$$

on déduit

$$a=\frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{1+\sin\frac{1}{2}\varphi};\quad b=\frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi}{1+\sin\frac{1}{2}\varphi};$$

faisant $\varphi+\psi=2q$, il vient

$$a=1-\text{tang}^2\frac{1}{4}\psi;\quad b=2\,\text{tang}\frac{1}{4}\psi;\quad 1-a=\text{tang}^2\frac{1}{4}\psi.$$

Applications numériques.

6° Soit à extraire la racine carrée de x^2+y^2 ; supposons [q]u'elle soit égale à $ax+by$; l'erreur totale sera [a]$x+by-\sqrt{x^2+y^2}$, et l'erreur *relative* est $\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}-1=z$; [on] cherche les valeurs de a et b, qui donnent à z une va[leu]r minimum dans l'intervalle de o à φ; faisant par exemple [φ] $=1^q$, on obtient $a=b=0{,}8284$; $1-a=0{,}1716$; on a donc, [à] moins d'un 0,1716 ou $\frac{1}{6}$ près, $\sqrt{x^2+y^2}=0{,}83\ (x+y)$, x et y étant quelconques, faisant successivement

$$\text{tang}\ \varphi = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ .....\ 10,$$

[o]n obtient pour le radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'une manière ap[pr]ochée.

0 — $0{,}8284\ (x+y)$ à $\frac{1}{6}$ près x et y quelconques.

		Erreurs.	
1 —	$0{,}96046x + 0{,}39783y$ —	$\frac{1}{25}$	— $x > y$
2 —	$0{,}98592x + 0{,}23270y$ —	$\frac{1}{71}$	— $x > 2y$
3 —	$0{,}99350x + 0{,}16123y$ —	$\frac{1}{154}$	— $x > 3y$
4 —	$0{,}99625x + 0{,}12260y$ —	$\frac{1}{200}$	— $x > 4y$
5 —	$0{,}99757x + 0{,}09878y$ —	$\frac{1}{417}$	— $x > 5y$
6 —	$0{,}99826x + 0{,}08261y$ —	$\frac{1}{589}$	— $x > 6y$
7 —	$0{,}99875x + 0{,}07098y$ —	$\frac{1}{800}$	— $x > 7y$

$$8 - 0{,}99905x + 0{,}06220y - \frac{1}{1649} - x > 8y$$

$$9 - 0{,}99930x + 0{,}05535y - \frac{1}{1428} - x > 9y$$

$$10 - 0{,}99935x + 0{,}04984y - \frac{1}{1578} - x > 10y$$

Ce tableau, que nous avons copié dans le mémoire de M. Poncelet, est extrêmement utile dans la pratique.

BIBLIOGRAPHIE.

—

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, PRÉCÉDÉES DES ÉLÉMENTS DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, *par* P. L. CIRODDE, *professeur de mathématiques au collége royal de Henri IV*, 2[e] édition, 1848, in-8°, III, 540, 9 pl. (L. Hachette et C[ie]).

La première édition de cet ouvrage de M. Cirodde est connue de la majorité de nos lecteurs. Il n'y aurait donc aucun intérêt à rendre compte de cette seconde, si des modifications nombreuses n'avaient été apportées par l'auteur dans l'ordre des matières, et s'il n'avait été fait dans certaines parties des changements utiles.

Dans l'avertissement placé en tête de cette seconde édition, M. Cirodde explique pour quelles raisons il a modifié son premier plan. Ces raisons sont bonnes à enregistrer pour servir à l'histoire des examens d'admission à l'école Polytechnique. Les réflexions que font naître de semblables faits nous entraîneraient bien loin, et nous demanderons bientôt aux habiles rédacteurs des *Nouvelles Annales de mathématiques* la permission de développer quelques considérations à ce sujet.

M. Cirodde s'exprime ainsi :

« A l'époque où je publiai la première édition de mes » leçons de *géométrie analytique*, les questions de l'examen » pour l'admission à l'école Polytechnique avaient pris une » extension démesurée. Ainsi on interrogeait les candidats » non-seulement sur les méthodes des *tangentes*, des *asymp-* » *totes*, des *centres* et des *diamètres*, mais encore sur la dé- » termination des *points maximum et minimum*, des *points* » *d'inflexion*, sur la *discussion des courbes d'ordre quelconque*, » *sur leur similitude*, etc., etc. C'était donc la *géométrie gé-* » *nérale* que les professeurs avaient à enseigner à leurs » élèves; de sorte que l'étude des propriétés des courbes du » second ordre devait se déduire, comme simple application » des théories dont nous venons de parler. Tel était l'ordre » tracé par les exigences des examens, et que j'avais dû » suivre, d'abord dans mes cours pendant les années sco- » laires 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, et ensuite dans » la rédaction de mon livre.

» Depuis lors le cercle de l'examen a été rétréci, ou plutôt » est rentré dans ses premières limites. En conséquence, » sans vouloir supprimer aucune des théories qui font de mon » livre un *traité complet de géométrie analytique*, j'ai cru de- » voir modifier dans cette seconde édition le plan que j'avais » suivi dans la première. »

Cette seconde édition nous semble offrir de nombreux avantages sur la précédente pour les élèves qui commencent à étudier la géométrie analytique, précisément à cause de l'ordre qui est suivi maintenant par M Cirodde.

Ainsi les difficultés sont graduées, le style est clair; quelques aperçus historiques donnent de l'intérêt au discours, et surtout une grande quantité d'exercices utiles sont offerts au lecteur. Cependant une remarque à ce sujet sera faite à la fin de cet article.

Ce traité est d'ailleurs complet, en ce que rien de ce qui est demandé aux candidats n'est omis. Nous citerons la théorie de la ligne droite, la théorie des transversales, et toutes les monographies des courbes du second ordre; les théories des tangentes, des asymptotes sont présentées avec tous les développements désirables et toute la concision nécessaire dans un ouvrage didactique.

Sous ce rapport, nous félicitons l'auteur sur les changements que présente cette nouvelle édition.

Nous croyons néanmoins qu'il y aura encore quelques coupures à faire dans la prochaine édition. — Autant que nous pouvons le voir par ses ouvrages, M. Cirodde n'aime pas les *notes*, *appendices*, *additions* rejetées à la fin d'un volume; cela nous semble cependant indispensable, surtout dans un ouvrage destiné à être mis entre les mains des élèves.

Nous offrirons un modèle à M. Cirodde, qui ne le trouvera point mauvais. — Nous pensons qu'il peut faire pour toutes ses publications ce qu'il a fait lui-même pour son arithmétique : une exposition rapide, concise, et pourtant complète, de ce qui est théorie; puis les applications de toutes ces théories à part; enfin des additions sur ce qui peut être utile, sans être indispensable. Que M. Cirodde s'imite lui-même à une prochaine édition.

Ainsi, un grand nombre de propriétés des trois courbes du second ordre auraient pu être conservées, mais rejetées en note à la fin du volume. Nous savons bien que les élèves demandent ces développements, mais il est bon de ne pas céder à ces entraînements. La géométrie analytique est une science fort simple dans ses principes; c'est là ce que les élèves doivent comprendre à une première lecture.

Tels qu'ils sont, tous les ouvrages de M. Cirodde, sont indispensables aux professeurs et aux élèves; mais nous pensons que M. Cirodde peut les améliorer encore; c'est ainsi

que ses ouvrages, qui, à l'exception de la statique, forment un cours complet de mathématiques supérieures (pour parler suivant les dernières ordonnances ministérielles), c'est ainsi, disons-nous que ses ouvrages auront le succès de son arithmétique, parvenue à la huitième édition, et qui est entre les mains de tous les candidats. A. Bl.

QUESTIONS.

175. La courbe, lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles tangentes à un cercle donné, et ayant pour foyer commun un point fixe sur la circonférence du même cercle, a pour équation entre les coordonnées polaires

$$r^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\omega}{3}.$$

(Strebor.)

176. Étant donnée la base d'un triangle curviligne, formé par trois arcs d'hyperboles équilatères, ayant le même centre, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera une ellipse de Cassini. (Strebor).

177. Donner une discussion complète du lieu géométrique d'un point tel, que si de là l'on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés, leur rectangle soit constant. (Ce lieu comprend, comme cas particuliers, l'ellipse de Cassini, ainsi que les courbes, lieux géométriques des projections orthogonales du centre d'une section conique sur ses tangentes.) (Strebor.)

NOTE

sur l'extraction de la racine carrée ou cubique à moins d'une demi-unité près, et sur le degré d'approximation avec lequel il faut calculer les nombres incommensurables dont on veut extraire la racine carrée ou cubique, pour que l'erreur du résultat reste au-dessous d'une limite donnée.

PAR M. VERHULST,
Professeur à Bruxelles.

—

Soit N un nombre donné, commensurable ou non; a, le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans N; $R = N - a^2$ le reste de l'extraction de la racine a. Si cette racine est approchée à moins d'une demi-unité près, on doit avoir

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ d'où } R < a + \frac{1}{4};$$

condition que l'on peut vérifier à la simple inspection de a, et que M. Bourdon a déjà mentionné dans la note qui termine son Traité d'arithmétique.

Il existe une condition analogue pour la racine cubique. Elle est moins simple, à la vérité; mais comme l'extraction de cette racine est une opération assez laborieuse, il ne faut pas dédaigner les moyens de l'abréger.

Soit N, R et a des nombres analogues aux précédents, la condition dont il s'agit sera

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^3,$$

ou

$$R < \frac{3a^2}{2} + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8} \dots\dots \quad (1)$$

Sur quoi nous ferons observer que par le procédé pour l'extraction de la racine cubique rapporté dans notre *Leçon d'arithmétique*, la quantité $3a^2$ s'obtient par une simple addition de trois nombres, dont deux se trouvent déjà écrits et dont le troisième n'a que deux chiffres.

L'inégalité (1) sera satisfaite *à fortiori*, si l'on a

$$\frac{3a^2}{2} > R;$$

alors la racine a sera approchée à moins d'une demi-unité près. Dans le cas contraire, on aura

$$R > \frac{3a^2}{2} + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8},$$

ou, ce qui revient au même,

$$R + \frac{1}{4}a > \frac{3a^2}{2} + a + \frac{1}{8} \ldots\ldots \quad (2)$$

Cette inégalité sera satisfaite *à fortiori* si l'on a la suivante

$$R > \frac{3a^2}{2} + a + 0.125,$$

très-facile à vérifier et qui fera généralement connaître s'il faut ajouter une demi-unité à la racine a. Ce n'est que dans des cas bien rares qu'il faudra recourir à l'inégalité (2), au moyen de laquelle toute incertitude doit disparaître.

Nous croyons devoir ajouter que le problème que nous venons de résoudre a pour but principal de faciliter la solution de deux autres très-importants dans la théorie des approximations numériques. Voici l'énoncé du premier :

Soit x *un nombre incommensurable*, a *sa valeur approchée à moins de* e *près*, $\frac{1}{7}$ *l'approximation avec laquelle on a extrait la racine carrée ou cubique de* a ; *assigner la limite de l'erreur que comporte le résultat.*

Nous prendrons pour point de départ la formule générale

$$\sqrt[m]{a+e}<\sqrt[m]{a}+\frac{e}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}},$$

et nous traiterons d'abord le cas où $m=2$; elle donne alors

$$\sqrt{a+e}<\sqrt{a}+\frac{e}{2\sqrt{a}}.$$

Soit r la racine de a approchée à moins de $\frac{1}{\gamma}$ près, on a

$$\sqrt{a}<r+\frac{1}{\gamma},$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{a+e}<r+\frac{1}{\gamma}+\frac{a}{2\sqrt{a}},\quad \sqrt{a+e}-r<\frac{1}{\gamma}+\frac{e}{2\sqrt{a}},$$

et, à plus forte raison, pour un nombre incommensurable x compris entre a et $a+e$

$$\sqrt{x}-r<\frac{1}{\gamma}+\frac{e}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, la différence entre la racine vraie et la racine calculée sera moindre que $\frac{1}{\gamma}+\frac{e}{2\sqrt{a}}$, expression dans laquelle on pourra remplacer $\sqrt{a}$ par r ou par toute autre limite inférieure. Nous désignerons en général par $\frac{1}{\delta}$ la différence dont on vient de parler. D'après ce qui précède, on a, dans le cas de la racine carrée,

$$\frac{1}{\delta}<\frac{1}{\gamma}+\frac{e}{2\sqrt{a}}\ldots\ldots \qquad (3)$$

et l'on trouve de la même manière quand il s'agit de la racine cubique

$$\frac{1}{\delta}<\frac{1}{\gamma}+\frac{e}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Le second problème est l'inverse du précédent. Il a pour

énoncé : *Avec quelle approximation faut-il calculer le nombre incommensurable* x, *pour qu'en extrayant à moins de* $\frac{1}{\gamma}$ *près la racine carrée ou cubique de sa valeur approchée* a, *l'erreur ne surpasse pas* $\frac{1}{\delta}$.

Commençons par le cas de la racine carrée. On remarquera qu'en vertu de l'inégalité (3), plus e est petit, plus $\frac{1}{\delta}$ doit l'être : par conséquent, si l'on remplace e par e', $\frac{1}{\delta}$ par $\frac{1}{\delta'}$, et qu'on prenne $e' < e$, $\frac{1}{\delta'}$ sera moindre que $\frac{1}{\delta}$. D'où il suit que, si le nombre incommensurable x est compris entre a et $a+e'$, l'erreur du résultat tombera au-dessous de $\frac{1}{\delta}$. Or, pour déterminer cette limite e', il suffira de poser l'équation

$$\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}=\frac{e'}{2\sqrt{a}},$$

d'où l'on tire :

$$e'=2\sqrt{a}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right); \qquad (4)$$

et pour la racine cubique :

$$e'=3\sqrt[3]{a^2}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right). \qquad (5)$$

Dans la plupart des applications, l'erreur totale $\frac{1}{\delta}$ est de la forme $\frac{1}{10^n}$, et le nombre x est supérieur à l'unité. Il est avantageux pour lors de prendre $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$, car les formules (4) et (5) donnent toutes $\frac{1}{10^n}$ pour limite de e, quand

on y substitue aux quantités $\sqrt{a}$ et $\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}$ leur limite inférieure, l'unité. De là ce théorème :

Pour obtenir la racine carrée ou cubique d'un nombre incommensurable, supérieur à l'unité, à moins d'une unité décimale de l'ordre n, *il suffit de calculer ce nombre avec la même approximation, et d'opérer l'extraction de racine à moins d'une demi-unité de cet ordre.*

L'extraction de racine des nombres incommensurables n'a pas été omise par M. Guilmin, dans l'excellente *Note* sur les approximations numériques, qu'il a publiée dans ces *Annales* (t. I, p. 249), et qu'il a reproduite depuis, avec quelques changements, dans son *Cours d'Arithmétique*. Mais il s'est contenté d'en référer aux règles connues, et ces règles ont l'inconvénient d'exiger le calcul des nombres incommensurables avec une précision beaucoup plus grande qu'il ne faut, et d'interdire par là l'usage des tables de logarithmes.

Proposons-nous, par exemple, de calculer, à moins d'un demi-millième près, la quantité

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}:$$

la théorie ordinaire enseigne qu'il faut chercher la racine cubique de 2 avec *huit décimales*, y ajouter 1, puis extraire avec quatre décimales la racine carrée de la somme. D'après le théorème précédent, il suffit de calculer la racine cubique de 2 à moins d'un dix-millième près, et d'extraire la racine carrée de $1 + \sqrt[3]{2}$, à moins de 0.00005. Par conséquent, ces deux opérations pourront s'effectuer très-facilement par les logarithmes.

NOTE

sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique.

(Fin, voir page 14.)

PAR M. VANNSON, professeur (Versailles).

V. Revenons au théorème qui nous a servi de point de départ, savoir : Le sinus de la moitié de la surface d'un triangle égale le sinus de l'arc qui joint les milieux de deux côtés multiplié par le sinus d'un arc mené perpendiculairement au milieu du troisième jusqu'à la rencontre de celui qui joint les deux milieux. Ce théorème est démontré dans les *Annales* par un calcul fort simple ; on peut aussi l'établir géométriquement. Soit ABC (*fig.* 6) le triangle donné, A'B'C' son triangle polaire, m et n les milieux de deux côtés. Il est aisé de voir que le cercle dont m est le pôle divise l'angle B'C'A'' en deux parties égales ; et de même celui dont n est le pôle divise l'angle C'B'A'' en deux parties égales. Le point O où ces deux cercles se coupent est donc le centre du cercle inscrit au triangle B'C'A'' ; soit m' le point de tangence ; on aura :

$$A''m' = \frac{A''C' + A''B' - B'C'}{2} = \frac{A + B + C - \pi}{2} = \text{le } \frac{1}{2} \text{ excès.}$$

D'ailleurs, les deux triangles mRB, C'OA'' sont polaires l'un de l'autre, et d'après leur position, l'angle R $=$ A''O ; enfin l'angle A''Om' est supplément de B'OC', qui lui-même est supplément de mn. Donc l'angle A''O$m' = mn$; or le triangle rectangle A''Om' donne sin A''m' ou

$$\sin\frac{S}{2} = \sin A''O \,.\, \sin A''Om' = \sin mn \,.\, \sin R.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Si on prolonge l'arc A″O, le segment pq, intercepté entre les cercles Rm et RB sera perpendiculaire sur le milieu de BC, et égalera A″O. Enfin, si on joint le point B au point S, la surface du triangle donné aura pour mesure le double de l'angle SBk; en d'autres termes, elle sera double du triangle birectangle SBR.

VI. De ce qui précède on peut conclure la solution du problème : Transformer un quadrilatère qui a deux côtés perpendiculaires au troisième en un triangle équivalent ayant un angle commun avec le quadrilatère. Soit $abcd$ (*fig.* 7) le quadrilatère, b et c ses deux angles droits, o l'intersection de ab avec cd; à partir du point m, milieu de od, prenez $mp = \frac{\pi}{2}$. Joignez pb; soit q la rencontre de cet arc avec ad prolongé; joignez oq, le triangle aqo satisfera à la question. En effet, prenez qS $= qd$, tirez So et prolongez l'arc pb jusqu'à la rencontre en n avec So. On sait (*Annales*, art. cité) que n sera le milieu de So. Donc, d'après ce qui précède, le triangle boc est la moitié du triangle Sod ou $= qod$; mais aod est une partie commune aux deux surfaces. Donc le triangle qoa est équivalent au quadrilatère $abdc$.

Lemme. Étant donné un angle A sur une sphère et un point O, mener un arc OCD, tel qu'on ait OC $=$ CD $=$ arc intercepté dans l'angle. La solution résulte immédiatement du théorème 14° de l'article ci-dessus indiqué.

VII. *Problème.* Avec un côté donné, l'angle adjacent et la surface, construire un triangle.

Soit AB (*fig.* 8) la base donnée, BAC l'angle adjacent. Supposons que la surface soit représentée par le double du triangle birectangle AKH. Le problème revient à mener par B un arc BDI, tel qu'on ait BD $=$ DI. Pour cela, il n'y a qu'à prendre KO $=$ HK et à mener par O un petit cercle pa-

rallèle au cercle AB; l'intersection de ce petit cercle avec AC sera le sommet du triangle demandé. Si l'angle A variait, la construction serait la même; donc le lieu des sommets des triangles de même aire et de même base est un petit cercle parallèle à la base. On peut encore prendre, à partir du point n milieu de AB, $n\mathrm{R}=\frac{\pi}{2}$; tirez l'arc RK, son intersection avec AC donnera le point I.

VIII. Si dans la figure 6, on suppose que l'angle A demeure constant, ainsi que la surface du triangle, dans le triangle polaire B′C′A″, la base B′C′, qui est le supplément de A, sera de longueur et de position constante, ainsi que la somme des côtés B′A″ + A″C′; on voit donc que le lieu du point A″ sera une ellipse sphérique ayant pour foyers les points B′, C′, et pour grand axe la somme constante B+C; la droite A″p divisant en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs A″B′, A″C′ sera normale à cette ellipse, et p sera le pôle d'un arc tangent mené à cette courbe par le point A″; or il est facile de démontrer que le lieu des pôles des arcs tangents à une ellipse sphérique est une seconde ellipse concentrique à la première, et dont les arcs tangents sont perpendiculaires aux arcs normaux de la première; ainsi la base BC, dans toutes ses positions, sera tangente à cette seconde courbe. De là résulte ce théorème :

Si dans un angle donné on mène une infinité d'arcs déterminant avec les côtés de l'angle des triangles de même surface, la courbe enveloppe de tous ces arcs sera une ellipse sphérique, dont les éléments se détermineront de la manière suivante (*fig.* 9) :

Soit BAC l'angle donné; du sommet A comme pôle, décrivez un arc de grand cercle mo; à partir du point p, milieu de mo, prenez $p\mathrm{C}'=p\mathrm{B}'=\frac{\pi-\mathrm{A}}{2}$; B′ et C′ seront les

foyers de la première ellipse dont nous avons parlé; des points B′, C′, comme pôles, décrivez, avec une distance polaire égale à $\frac{B'C'+S}{2}$ (S désigne la surface donnée), deux arcs de cercles qui se couperont en A″; par les points A″, B′, A″, C′ menez deux arcs de grand cercle, qui se couperont en un autre point A′; puis de A′ comme pôle, tracez l'arc BC; ABC aura la surface donnée. En effet, cette surface a pour mesure $A+B+C+\pi = B'A''+C'A''-B'C' = S$; joignez A″ au point p, et prolongez l'arc obtenu jusqu'en L, où il rencontre BC; prenez $pL' = pL$, puis $pq = pq' =$ le complément de C′A″. Les quatre points L, L′, q, q' seront les quatre sommets de l'ellipse cherchée (*).

Il est facile de calculer les deux axes de cette ellipse. En effet, $C'A'' = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{A-S}{2}\right)$; donc pq' que nous appellerons $b = \frac{A-S}{2}$; d'ailleurs, dans le triangle $pA''C'$ on a :

$$\text{tang}\, pA'' = \text{tang}\, C'A''.\cos\frac{A}{2} = \cot\left(\frac{A-S}{2}\right)\cos\frac{A}{2};$$

donc

$$\text{tang}\, pL \text{ ou } \text{tang}\, a = \frac{1}{\cot\left(\frac{A-S}{2}\right)\cos\frac{A}{2}} = \frac{\text{tang}\left(\frac{A-S}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}};$$

si maintenant on projette un point de la courbe sur les deux axes rectangulaires pA'' et pC', qu'on appelle x le segment px et y le segment py, l'équation de la courbe sera :

$$\frac{\text{tang}^2 y}{\text{tang}^2 b} + \frac{\text{tang}^2 x}{\text{tang}^2 a} = 1. \qquad (^{**})$$

(*) Cette proposition est énoncée sans démonstration dans un mémoire de M. Chasles, imprimé dans le journal de M. Liouville (t. II, p. 102, 1837).

(**) Pour ne pas donner trop d'étendue à cette note, nous avons regardé comme connue l'équation de l'ellipse sphérique. Nous nous proposons de revenir sur ce sujet dans un autre article.

Si on remplace tang a et tang b par leurs valeurs, l'équation du lieu demandé sera :

$$\text{tang}^2 y \,.\, \cot^2\left(\frac{A-S}{2}\right) + \text{tang}^2 x \cot^2\frac{A-S}{2}\cos^2\frac{A}{2} = 1,$$

ou plus simplement :

$$\text{tang}^2 y + \text{tang}^2 x \,.\, \cos^2\frac{A}{2} = \text{tang}^2\frac{A-S}{2}.$$

IX. Si on donnait sur une sphère un point et un angle, et qu'on demandât de mener par ce point un arc qui fasse avec les côtés de l'angle un triangle de surface connue, le problème se ramènerait, d'après ce qui précède, à conduire par un point donné un arc tangent à une ellipse tracée sur une sphère, question qui se résout par une construction toute semblable à celle du problème analogue sur un plan.

X. Nous avons, dans le théorème précédent, énoncé cette proposition : Le lieu des pôles des arcs tangents à une ellipse sphérique est une autre ellipse sphérique dont les axes ont la même direction que ceux de la première ; et pour longueurs les suppléments des axes de la première. Pour y parvenir, nous commencerons par chercher l'équation d'un grand cercle sur une sphère, connaissant son pôle (*fig.* 10). Soit o le pôle d'un cercle quelconque, ρ sa distance polaire, A l'origine ; projetons le point o sur les deux axes AX, AY. Soit $AP=x'$, $AQ=y'$; m un point quelconque du cercle, que nous projetons en p et en y. Joignons om ; dans le triangle omT, nous avons :

$$\cos\rho = \sin oP \,.\, \sin mp + \cos oP \cos mp \,.\, \cos Pp.$$

Si $\rho = \frac{\pi}{2}$, cette équation devient :

$$\text{tang}\, oP \,.\, \text{tang}\, mp + \cos(x - x') = 0\,;$$

mais dans le triangle oPS,

$$\text{tang}\, oP = \sin PS,\ \text{tang}\, AQ = \cos x',\ \text{tang}\, y'.$$

De même, $\tang mp = \cos x \tang y$; donc l'équation demandée sera :

$$\tang y \tang y' + \tang x \tang x' = -1.$$

L'équation de l'ellipse étant, comme nous l'avons rappelé ci-dessus :

$$\left(\frac{\tang y}{\tang b}\right)^2 + \left(\frac{\tang x}{\tang a}\right)^2 = 1,$$

et ne différant de celle de l'ellipse plane qu'en ce que les quantités x, y, etc. sont remplacées par leurs tangentes, il est facile de démontrer qu'il en sera de même pour l'équation d'un grand cercle tangent à la courbe. Ce sera :

$$\tang^2 a \tang y \tang y'' + \tang^2 b \tang x \tang x'' = \tang^2 a \tang^2 b,$$

x'', y'' étant les coordonnées du point de contact, pour exprimer que cette équation est identique à celle du grand cercle ci-dessus trouvée, cherchons pour chacun des deux cercles l'intersection avec les axes, et égalons les résultats, nous aurons :

$$\frac{\tang^2 a}{\tang x''} = -\frac{1}{\tang x'} \quad \text{et} \quad \frac{\tang^2 b}{\tang y''} = -\frac{1}{\tang y'};$$

d'où

$$\tang x'' = -\tang^2 a . \tang x' \quad \text{et} \quad \tang y'' = -\tang^2 b . \tang y'.$$

Portant ces valeurs de $\tang y''$, etc. dans l'équation de l'ellipse, nous aurons :

$$\frac{\tang^2 y'}{\cot^2 b} + \frac{\tang^2 x'}{\cot^2 a} = 1.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

XI. On peut se proposer la question générale de trouver, étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, le lieu des pôles des cercles tangents menés aux points de cette courbe. Pour cela, par deux points de la courbe $(x', y'. x''y'')$

faisons passer un cercle, et désignons par α, β les coordonnées du pôle de ce cercle ; son équation sera :

$$\operatorname{tang} y \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \alpha = -1;$$

comme le cercle doit passer par les deux points donnés, on aura :

$$\operatorname{tang} y' \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x' \operatorname{tang} \alpha = -1,$$
$$\operatorname{tang} y'' \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x'' \operatorname{tang} \alpha = -1.$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on trouve :

$$(\operatorname{tang} y' - \operatorname{tang} y'') \operatorname{tang} \beta + (\operatorname{tang} x' - \operatorname{tang} x'') \operatorname{tang} \alpha = 0,$$

ou

$$\sin(y'-y'') \operatorname{tang}\beta \cos x' \cos x'' + \sin(x'-x'') \operatorname{tang}\alpha \cos y' \cos y'' = 0,$$

ou

$$\frac{\sin(y'-y'')}{\sin(x'-x'')} \operatorname{tang}\beta \cos x' \cos x'' + \operatorname{tang}\alpha \cos y' \cos y'' = 0.$$

Si les deux points se réunissent en un seul, le rapport $\frac{\sin(y'-y'')}{\sin(x'-x'')}$ tendra vers une limite que nous représenterons par la notation ordinaire $\frac{dy'}{dx'}$, et nous aurons :

$$\frac{dy'}{dx'} \operatorname{tang}\beta \cos^2 x' + \operatorname{tang}\alpha \cos^2 y' = 0.$$

Nous avons aussi la relation exprimant que le cercle proposé passe par le point $x'y'$,

$$\operatorname{tang}\beta (\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} y') + \operatorname{tang}\alpha (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x') = 0.$$

Éliminant $\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}$, on a enfin pour équation du cercle tangent en un point $x'y'$ d'une courbe quelconque sur la sphère :

$$\frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} y'}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x'} = \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{\cos^2 x'}{\cos^2 y'};$$

mais α et β désignent les coordonnées du pôle de ce cercle; l'équation précédente doit être identique à l'équation

$$\tang y \tang\beta + \tang x \tang\alpha = -1;$$

ce qu'on exprime en écrivant que les deux cercles ainsi représentés coupent les axes aux mêmes points. On trouve ainsi :

$$\tang\alpha = \frac{2dy'\cos^2 x'}{dx'\sin 2y' - dy'\sin 2x'};$$

$$\tang\beta = \frac{-2dx'\cos^2 y'}{dx'\sin 2y' - dy'\sin 2x'}.$$

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x' et y', on aura l'équation du lieu demandé.

Note. Ces diverses propriétés, peu connues en France, ont été traitées avec étendue par M. Gudermann, dans son traité de Géométrie sphérique et dans divers mémoires insérés dans le journal de M. Crelle; ce qui n'ôte rien au mérite de ce beau travail. Tm.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 162.

(*V. page* 28).

PAR M. LE GALLAIS,
élève du collége de La Flèche.

—

ABCDE étant un pentagone plan, représentons par α, β, γ, δ, ε, les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, et par S l'aire du polygone, on a :

$$S^2 - S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha = 0 \text{ (Gauss)}$$

ou, pour employer des notations abrégées, $S^2 + P = SS'$ (*fig.* 11).

Je prolonge le côté $\overline{DE}$ indéfiniment dans les deux sens; des points A, B, C, j'abaisse sur la direction de ce côté les perpendiculaires $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$:

$$\overline{AA'}=a, \begin{cases}\overline{BB'}=b\\ \overline{A'B'}=b'\end{cases} \begin{cases}\overline{CC'}=c\\ \overline{A'C'}=c'\end{cases} \overline{A'D}=d,\ \overline{A'E}=e.$$

Cela posé, il est facile de voir que

$$S=b'\left(\frac{a+b}{2}\right)+(c'-b')\left(\frac{b+c}{2}\right)-\frac{ae}{2}-c\left(\frac{c'-d}{2}\right)=$$
$$=a\left(\frac{b'-e}{2}\right)+b\frac{c'}{2}+c\left(\frac{d-b'}{2}\right).$$

En cherchant par des considérations analogues la mesure des triangles α, β, γ, δ, ϵ, on arrive à poser les six égalités :

$$S=a\left(\frac{b'-e}{2}\right)+b\frac{c'}{2}+c\left(\frac{d-b'}{2}\right)$$
$$\alpha=a\left(\frac{b'-c'}{2}\right)+b\frac{c'}{2}-c\frac{b'}{2}$$
$$\beta=b\left(\frac{c'-d}{2}\right)+c\left(\frac{d-b'}{2}\right)$$
$$\gamma=c\left(\frac{d-e}{2}\right)$$
$$\delta=a\left(\frac{d-e}{2}\right)$$
$$\epsilon=a\left(\frac{b'-c}{2}\right)+b\frac{e}{2}.$$

La solution de la question n'est plus, maintenant, qu'une affaire de calcul.

On a immédiatement :

$$S'=a\left[(b'-e)-\left(\frac{c'-d}{2}\right)\right]+b\left[c'-\left(\frac{d-e}{2}\right)\right]+$$
$$+\left[(d-b')-\frac{e}{2}\right];$$

d'où

$$SS' = a^2\left[\frac{(b'-e)^2}{2} - \frac{(b'-e)(c'-d)}{4}\right] + b^2\left[\frac{c'^2}{2} - \frac{c'(d-e)}{4}\right] +$$

$$+ c^2\left[\frac{(d-b')^2}{2} - \frac{e(d-b')}{4}\right] +$$

$$+ ab\left[c'(b'-e) - \frac{c'(c'-d)}{4} - \frac{(b'-e)(d-e)}{4}\right] +$$

$$+ ac\left[(b'-e)(d-b') - \frac{(b'-e)e}{4} - \frac{(c'-d)(d-b')}{4}\right] +$$

$$+ bc\left[c'(d-b') - \frac{ec'}{4} - \frac{(d-e)(d-b')}{4}\right].$$

Ordonnant les doubles produits tels que $\alpha'\beta$ d'une manière analogue, on trouve facilement :

$$P = \frac{a^2}{4}\left[(b'-e)(b'-c') + (b'-c)(d-e)\right] + \frac{b^2}{4}\left[(c'-d)c' + ec'\right] +$$

$$+ \frac{c^2}{4}\left[(d-b')(d-e) - (d-b')b'\right] +$$

$$+ \frac{ab}{4}\left[(b'-c')(c'-d) + (b'-e)(e+c') + (d-e)e\right] +$$

$$+ \frac{ac}{4}\left[(d-e)^2 + (b'-c)(d-b') - b'(b'-e)\right] +$$

$$+ \frac{bc}{4}\left[(c'-d)(d-e) - (c'-d)b' + (d-b')c' - b'e\right].$$

Enfin, le carré de S se développe naturellement suivant ces mêmes espèces de termes qui composent P et SS', et l'on a :

$$S^2 = a^2\,\frac{(b'-e)^2}{4} + b^2\,\frac{c'^2}{4} + c^2\,\frac{(d-b')^2}{4} + ab\,\frac{(b'-c)c'}{2} +$$

$$+ ac\,\frac{(b'-e)(d-b')}{2} + bc\,\frac{(d-b')c'}{2}.$$

Comparant maintenant les expressions de S^2, de P et de SS', il est facile de vérifier que la somme des coefficients

dont se trouve affecté un même terme, tel que a^2 ou ab, dans S^2 et dans P, est égale au coefficient du même terme dans SS'. Cela étant vrai pour tous, on a nécessairement :

$$S^2 + P = SS'.$$

Note. Nous offrons cette seconde solution comme exercice de calcul et non comme moyen d'investigation.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME I (p. 122, t. I).

PAR M. LUCIEN GILLES,
élève du collége Saint-Louis.

—

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils sont circonscriptibles et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont proportionnelles et semblablement placées.

I. *Lemme.* Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont circonscriptibles et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont égales et semblablement placées.

En effet, soient les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 12, 13), circonscriptibles et tels que OA = O'A', OB = O'B', OC = O'C', etc. Je dis que ces deux polygones sont égaux. L'égalité serait évidente si nous prouvions que OF = O'F'; car alors, en tirant les rayons OF, O'F', OG, O'G', etc., nous décomposerions les deux polygones en un même nombre de triangles rectangles égaux deux à deux, comme ayant leurs hypoténuses égales par hypothèse et un côté égal (le rayon des cercles inscrits), et ces triangles seraient semblablement placés.

Or je dis que OF = O'F'. En effet, supposons que l'on ait OF < O'F'; alors dans les deux triangles rectangles OFE et O'F'E' comme nous avons OE = O'E' si OF < O'F', nous en

tirerons $FOE > F'O'E'$. Les deux triangles rectangles AOF, $A'O'F'$, nous donneront semblablement $AOF > A'O'F'$. Ajoutant ces deux inégalités, il viendra $EOA > E'O'A'$. On trouverait de même, en décomposant d'une manière semblable les triangles AOB, $A'O'B'$, BOC, $B'O'C'$, etc., que $AOB > A'O'B'$, $BOC > B'O'C'$, etc. D'où, en ajoutant ces inégalités membre à membre, on trouverait que la somme des angles autour du point O est plus grande que la somme des angles autour du point O', ce qui est absurde.

On prouverait identiquement de la même manière que l'on ne peut pas avoir $OF > O'F'$. Donc l'on a $OF = O'F'$. Donc les deux polygones sont égaux. C. Q. F. D.

II. Soient les deux polygones $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$, circonscriptibles, et tels que l'on ait :

$$OA : O_1A_1 :: OB : O_1B_1 :: OC : O_1C_1 :: \text{etc.}$$

Je dis qu'ils sont semblables.

En effet, prenons une longueur $O'E' = OE$ et sur cette droite comme côté homologue de O_1E_1 construisons un polygone semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$, soit $A'B'C'D'E'$ (*). Ce polygone est circonscriptible et O' est le centre du cercle inscrit. Tirons les droites $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, etc.

Les deux triangles $A'O'E'$ et $A_1O_1E_1$ sont semblables par construction; ils donnent la proportion

$$A_1O_1 : A'O' :: O_1E_1 : O'E'.$$

Mais $O'E' = OE$ par hypothèse. Cette proportion revient donc à celle-ci

$$A_1O_1 : A'O' :: O_1E_1 : OE.$$

Mais nous avons par hypothèse

$$A_1O_1 : AO :: O_1E_1 : OE.$$

(*) On est prié de faire la figure.

Comparant ces deux proportions, on en tire $AO = A'O'$; donc les deux triangles semblables $A'O'B'$ et $A_1O_1B_1$ donnent

$$AO : A_1O_1 :: O'B' : O_1B_1.$$

Mais nous avons aussi par hypothèse

$$AO : A_1O_1 :: OB : O_1B_1 ;$$

on en tire $OB = O'B'$, et on trouve de même

$$OC = O'C',\ OD = O'D',\ OE = O'E'.$$

Donc par le premier théorème le polygone ABCDE est égal au polygone A'B'C'D'E'. Mais par construction ce dernier est semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$; donc ABCDE est semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$. C. Q. F. D.

III. On démontre de la même manière que deux polygones sont *équivalents*, lorsqu'ils sont circonscriptibles, et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont égales, sans qu'elles soient semblablement placées.

En effet, supposons que les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' soient circonscriptibles, et tels que

$$OA = O'C',\ OB = O'E',\ OC = O'B',\ OD = O'A',\ OE = O'D'.$$

Nous démontrerons comme précédemment que les rayons des cercles inscrits sont égaux. La seule différence, c'est que les triangles rectangles dans lesquels nous décomposons les deux polygones ne seraient pas semblablement placés, et c'est ce qui fait que les polygones ne sont qu'équivalents.

IV. M. Paul Serret m'a fait remarquer un théorème à peu près analogue à celui que je viens de démontrer sur la similitude des polygones, savoir :

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils sont inscriptibles, et que les distances des centres des cercles circonscrits

aux côtés sont proportionnelles et semblablement placées.

Ce théorème se démontre de la même manière que le précédent.

La seule différence c'est que dans la première partie du théorème, pour prouver que deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont inscriptibles, et que les distances des centres des cercles circonscrits aux côtés sont égales et semblablement placées, on a des triangles rectangles dont les hypoténuses varient; mais alors l'un des côtés de l'angle droit est constant; la conclusion est la même que la précédente. De même pour les polygones équivalents.

V. Il est à remarquer cependant que ces démonstrations n'ont lieu que lorsque les centres des cercles inscrits ou circonscrits sont dans l'intérieur des polygones. Le cas où le centre est *extérieur* reste à démontrer.

NOTE

sur la théorie du parallélogramme de Watt.

PAR M. A.-J.-H. VINCENT.

—

Dans les mémoires de la Société royale des sciences, de l'agriculture et des arts, de Lille, pour 1836 et 1837, p. 5 et suiv., j'ai donné et discuté l'équation de la *courbe à longue inflexion*, sorte de *lemniscoïde* du sixième degré, qui jouit de cette curieuse et importante propriété, que la tête du piston des *machines à vapeur*, tout en en décrivant un arc d'une notable étendue, peut être néanmoins considérée comme suivant une direction à peu près rectiligne, quand on règle son

mouvement au moyen de cet ingénieux appareil auquel on a donné le nom de *parallélogramme de Watt*.

(*Fig.* 17.) Je rappellerai, d'après Hachette, que la question revient à déterminer le lieu géométrique d'un point M situé sur une droite dont un segment constant, PQ, est assujetti à glisser entre deux circonférences ayant respectivement les points A et B pour centres, et pour rayons AQ et BP. Alors, en prenant pour origine des coordonnées rectangulaires un point quelconque O de la droite AB prise elle-même pour base des x, puis faisant :

$$OA = a;\quad OB = b;\quad AB = a + b = c;$$
$$BP = p;\quad AQ = q;$$
$$PM = r;\quad QM = s;\quad PQ = s - r = d;$$

et enfin, nommant x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point P, x'' et y'' celles du point Q, on a, comme dans le mémoire cité, ces *six* équations :

$$(x' - b)^2 + y'^2 = p^2, \qquad (1)$$
$$(x'' + a)^2 + y''^2 = q^2, \qquad (2)$$
$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = d^2, \qquad (3)$$
$$y(x' - x'') - x(y' - y'') = x'y'' - y'x'', \qquad (4)$$
$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2, \qquad (5)$$
$$(y - y'')^2 + (x - x'')^2 = s^2, \qquad (6)$$

dont une, l'équation (3), n'est qu'une conséquence des trois suivantes, ce qui laisse ainsi le nombre d'équations justement nécessaire pour permettre l'élimination des *quatre* quantités variables x', y', x'', y''.

Cela posé, je dirai que ce qui m'engage à revenir ici sur ce sujet, c'est la possibilité, d'abord inaperçue, de simplifier de beaucoup la méthode employée pour faire cette élimination, et surtout de conserver au calcul une utile symétrie, avantage dont on est privé quand on place l'origine à l'un

des points A et B, comme je l'avais fait dans mon premier essai.

Cette simplification résulte d'une forme plus élégante dont est susceptible l'équation (4), c'est-à-dire l'équation de la droite qui passe par les deux points donnés (x', y'), (x'', y''). En effet, on peut mettre une pareille équation sous l'une de ces deux formes :

$$\left.\begin{aligned} x(y'-y'')+x'(y''-y)+x''(y-y')=0, \\ y(x'-x'')+y'(x''-x)+y''(x-x')=0, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

qui expriment chacune une relation, soit entre les abscisses de trois points quelconques de la droite et les différences de leurs ordonnées prises deux à deux, soit entre les ordonnées des trois points et les différences de leurs abscisses.

D'un autre côté, comme ces différences d'ordonnées et d'abscisses ne sont autre chose que les projections sur les axes, des distances des trois points eux-mêmes pris deux à deux, distances qui sont ici représentées, savoir :

par r pour $(y-y')$ et $(x-x')$,
par s pour $(y-y'')$ et $(x-x'')$,
et enfin par d pour $(y'-y'')$ et $(x'-x'')$,

il s'ensuit que les équations (A) peuvent se traduire dans les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} dx - sx' + rx'' = 0, \\ dy - sy' + ry'' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Maintenant l'équation (1) combinée avec l'équation (5) d'une part, et semblablement l'équation (2) avec l'équation (6), nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} & y^2+x^2-2(yy'+xx')+2bx'-b^2+p^2-r^2=0, \\ \text{et } & y^2+x^2-2(yy''+xx'')-2ax''-a^2+q^2-s^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Prenons dans (B) les valeurs de x'' et y'', savoir :

$$x'' = \frac{sx' - dx}{r} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{sy' - dy}{r}, \qquad \text{(D)}$$

et substituons-les dans la seconde des équations (C); nous en déduisons, après avoir multiplié par r et simplifié,

$$r(y^2 + x^2) + 2y(dy - sy') + 2(x + a)(dx - sx') - \\ - r(a^2 - q^2 + s^2) = 0. \qquad \text{(E)}$$

D'un autre côté, la première équation du même système (C), multipliée par s, devient :

$$s(y^2 + x^2) - 2s(yy' + xx') + 2bsx' - s(b^2 - p^2 + r^2) = 0. \quad \text{(F)}$$

Alors, en retranchant (F) de (E) et réduisant, on obtient :

$$d(y^2 + x^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3 = 2csx', \quad \text{(G)}$$

en faisant pour simplifier, comme dans l'équation 19 du mémoire cité (11 du tirage à part in-4°) :

$$p^2s - q^2r + drs = k^3.$$

De là on peut tirer, d'abord :

$$x' = \frac{d(y^2 + x^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3}{2cs}; \quad \text{(H)}$$

puis ensuite, par la substitution dans (C),

$$y' = \frac{cs(x^2 + y^2 + p^2 - b^2 - r^2) - (x - b)[d(x^2 + y^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3]}{2csy}$$

Il ne reste plus alors, après avoir tiré de x',

$$(x' - b) = \frac{d(y^2 + x^2) + 2adx + a^2d - c^2s - k^3}{2cs}, \quad \text{(J)}$$

qu'à substituer cette expression et celle de y', dans l'équation (1), ce qui donne pour résultat une équation qui ne diffère pas de la formule numérotée 26 dans le premier tableau du mémoire cité (ou de la première équation de la page 6 du tirage à part), dès qu'on a substitué, dans cette dernière, $(x + a)$ au lieu de x, ou $(x - b)$ au lieu de $(x - c)$.

Je terminerai cette note en signalant aux lecteurs des

Annales une communication faite à la Société philomathique, le 21 avril 1838, par M. Babinet, à l'occasion du mémoire cité. Le savant physicien y donne une formule déduite du principe des vitesses virtuelles, au moyen de laquelle on calcule l'action du piston de la machine à vapeur, quand le parallélogramme articulé n'est plus rectangle, et qu'il a tourné d'un angle donné (voir le Bulletin de la Société et le journal *l'Institut*, 1re section).

THÉORÈME

Sur les tangentes aux coniques.

—

Soient MT, M'T' (fig. 16) *deux tangentes menées par le point* M *à une ellipse dont les foyers sont* F,F'; *si l'on prend sur ces tangentes des longueurs* MO, MO', *respectivement égales aux distances* MF, MF', *la droite* OO' *sera égale au grand axe* $2a$ *de l'ellipse*. (Strebor.)

Démonstration. Sur F'T je prends F'TD $= 2a$; il en résulte, comme on sait, MD $=$ MF. D'ailleurs, d'après le théorème de M. Poncelet, l'angle F'MD $=$ O'MO; donc les triangles F'MD, O'MO sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux. Par conséquent :

$$OO' = F'D = 2a.$$

Observation. I. Faisant la même construction au foyer F, on obtient un triangle FMD' égal au triangle F'MD; donc l'angle F'MD $=$ FMD', et de là l'angle DMF $=$ D'MF'. Mais les tangentes MT, MT' sont bissectrices, ce qui démontre le théorème de M. Poncelet et celui de M. Strebor.

II. Ce dernier théorème subsiste aussi dans l'hyperbole, avec cette modification que lorsque les points de contact T, T' sont sur la même branche, une des longueurs MO, MO' doit être portée dans le sens opposé.

III. Les mêmes constructions et les mêmes conséquences existent aussi pour l'ellipse sphérique. G.

AIRE D'UN QUADRILATÈRE QUELCONQUE,

PAR M. J.-G. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

—

Théorème. *Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par* a, b, c, d, *et ses diagonales par* m, n, *l'aire* Q *de ce quadrilatère est*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}.$$

Démonstration. On a (*fig.* 14) :

$$Q=\frac{1}{2}m(BE+DF),$$

d'où

$$16Q^2=4m^2(BE+DF)^2. \qquad (1)$$

Cela posé, les triangles rectangles semblables BEI, DFI donnent

$$BE : DF :: BI : DI :: EI : FI,$$

d'où

$$(BE+DF)^2 : \overline{DF}^2 :: (BI+DI)^2 : \overline{DI}^2 :: (EI+FI)^2 : \overline{FI}^2;$$

or

$$\overline{DF}^2=\overline{DI}^2-\overline{FI}^2,$$

donc

$$(BE+DF)^2=(BI+DI)^2-(EI+FI)^2=n^2-\overline{EF}^2;$$

ou bien, en multipliant par $4m^2$:

$$4m^2(\mathrm{BE}+\mathrm{DF})^2=4m^2n^2-4m^2\overline{\mathrm{EF}}^2; \qquad (2)$$

on a ensuite par les triangles ABC, ACD,

$$a^2-b^2=m^2-2m\mathrm{CE},$$
$$c^2-d^2=m^2-2m\mathrm{AF};$$

d'où, en ajoutant

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2m^2-2m(\mathrm{CE}+\mathrm{AF})=2m\mathrm{EF};$$

élevant au carré, il vient

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2\overline{\mathrm{EF}}^2. \qquad (3)$$

Ajoutant actuellement membre à membre les égalités (1), (2) et (3), et réduisant, on obtient

$$16\mathrm{Q}^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2n^2,$$

d'où

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2},$$

ou enfin

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}. \qquad (\mathrm{A})$$

Corollaire I. Lorsque le quadrilatère est *inscriptible* dans un cercle, on a $mn=ac+bd$; la valeur de Q devient dans ce cas :

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2)},$$

ou

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b-d)(a+c+d-b)(b+d+a-c)(b+d+c-a)};$$

donc $$\mathrm{Q}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \qquad (\mathrm{B})$$

en posant $$a+b+c+d=2s.$$

Corollaire II. Lorsque le côté a est parallèle à c, la figure ABCD est un *trapèze* et on a :

$$m^2 + n^2 = d^2 + b^2 = 2ac \text{ (*)}, \qquad (4)$$

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2).\frac{a+c}{a-c}. \qquad (5)$$

Substituant dans (A) la valeur de d^2+b^2, tirée de (4), il vient :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2+c^2-m^2-n^2+2ac)\,(2mn-a^2-c^2+m^2+n^2-2ac)},$$

ou bien

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(m+n)^2]\,[(m+n)^2-(a+c)^2]},$$

d'où on déduit, pour *l'aire du trapèze, en valeur des bases et diagonales* :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c+m-n)\,(a+c+n-m)\,(m+n+a+c)\,(m+n-a-c)},$$

ou $$T = \sqrt{s(s-p)\,(s-m)\,(s-n)}, \qquad (C)$$

en posant $a+c+m+n = 2s$ et $a+c = p$.

Effectuant le calcul sous le radical qui précède les deux derniers, et observant que $(m-n)^2(m+n)^2 = (m^2-n^2)^2$ et $(m+n)^2+(m-n)^2 = 2(m^2+n^2)$, il vient aussi :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(m^2+n^2)-(a+c)^4-(m^2-n^2)^2}.$$

Mettant dans cette expression les valeurs (4) et (5), on obtient :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(b^2+d^2+2ac)-(a+c)^4-(d^2-b^2)^2.\frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}},$$

ou

$$T = \frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{[2b^2+2d^2+4ac-(a+c)^2]\,(a-c)^2-(d^2-b^2)^2},$$

(*) Voir la Remarque qui termine la Note.

enfin si on remarque que

$$2b^2+2d^2=(b+d)^2+(b-d)^2,$$
$$(d^2-b^2)^2=(b^2-d^2)^2=(b+d)^2(b-d)^2,$$
$$4ac-(a+c)^2=-(a-c)^2,$$

on trouve :

$$T=\frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{[(b+d)^2-(a-c)^2]\,[(a-c)^2-(b-d)^2]},$$

ou bien

$$T=\frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{(b+d+a-c)\,(b+d+c-a)\,(a-c+b-d)\,(a-c+d-b)}$$

donc

$$T=\frac{p}{q}\sqrt{s(s-q)(s-b)(s-d)},$$

en faisant $a-c+b+d=2s$, $a+c=p$, $a-c=q$.

Corollaire III. Lorsque $a=c$, $b=d$, le quadrilatère est un *parallélogramme ;* dans ce cas

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-4(a^2-b^2)^2},$$

ou $$P=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+2a^2-2b^2)\,(2mn-2a^2+2b^2)}.$$

Ajoutant la quantité $m^2+n^2-2a^2-2b^2=0$ à chacun des facteurs sous le radical, il vient :

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{[(m+n)^2-4a^2]\,[(m+n)^2-4b^2]},$$

ou enfin

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{(m+n+2a)(m+n-2a)(m+n+2b)(m+n-2b)}. \quad (E)$$

On conclut de là que si p et q représentent les diagonales qui joignent les milieux des côtés opposés d'un *quadrilatère quelconque*, on aura aussi ;

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{(p+q+m)(p+q-m)(p+q+n)(p+q-n)};\quad (F)$$

car tout quadrilatère est double du parallélogramme formé par les lignes qui joignent les milieux des côtés adjacents.

Si le parallélogramme est un *losange*, on a $a=b$, de sorte qu'il vient :

$$L=\frac{1}{4}[(m+n)^2-4a^2],$$

ou bien

$$L=\frac{1}{4}(m+n+2a)\ (m+n-2a)...,\qquad (G)$$

remplaçant $4a^2$ par sa valeur m^2+n^2 et réduisant, on a aussi :

$$L=\frac{1}{2}mn,$$

ce qui est évident.

Enfin, si le parallélogramme est un *rectangle*, on a $m=n$; donc

$$R=\sqrt{(m+a)(m-a)(m+b)(m-b)}.\qquad (H)$$

Corollaire IV. Lorsque $n=a$, $m=c$, $d=0$, le quadrilatère ABCD se réduit au *triangle* ABC, dont l'aire sera

$$t=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)},$$

donc

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\qquad (I)$$

en faisant $a+b+c=2s$.

Remarque. Les deux égalités (4) et (5) constituent deux principes importants du trapèze, dont le second a été trouvé, il y a peu d'années, par M. Cadet (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 189, 1842).

Ils s'énoncent de la manière suivante :

Dans tout trapèze,

1° *La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés augmentée du double rectangle des bases;*

2° *La différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés, comme la somme des bases est à leur différence.*

Ces deux théorèmes se démontrent presque simultanément à l'aide des égalités :

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ax, \quad (6) \qquad m^2 = c^2 + d^2 + 2cy, \quad (8)$$
$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ay, \quad (7) \qquad n^2 = c^2 + b^2 + 2cx, \quad (9)$$

que fournissent les triangles composants du trapèze ABCD (*fig.* 15).

En effet : 1° Si on ajoute toutes ces égalités membre à membre, et qu'on divise par 2, on aura :

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a - c)(x + y);$$

or $x + y = a - c$; donc, substituant et réduisant, il vient :

$$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

2° Retranchant la somme des égalités (7) et (9) de celle des égalités (6) et (8), on obtient, en divisant par 2,

$$m^2 - n^2 = (a + c)(y - x).$$

Or, puisque CE = DF, on a $b^2 - x^2 = d^2 - y^2$, ou $y^2 - x^2 = d^2 - b^2$, ou encore $(y - x)(y + x) = d^2 - b^2$. On déduit de là :

$$y - x = \frac{d^2 - b^2}{y + x} = \frac{d^2 - b^2}{a - c};$$

donc

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2) \cdot \frac{a + c}{a - c}.$$

Dans ces démonstrations, l'idée de l'emploi simultané des égalités (6), (7), (8) et (9) m'a été fournie par l'obligeante amitié de M. O. Wost, *de Strasbourg*. Ce savant professeur élimine x entre (6) et (9), y entre (7) et (8), ce qui le conduit aux relations :

$$cm^2 + an^2 = ac(a+c) + b^2(a+c), \qquad (10)$$
$$am^2 + cn^2 = ac(a+c) + d^2(a+c). \qquad (11)$$

Ajoutant membre à membre et divisant par $(a+c)$, il a :

$$m^2 + n^2 = 2ac + b^2 + d^2;$$

retranchant ensuite membre à membre et divisant par $(a-c)$, il obtient :

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2) \cdot \frac{a+c}{a-c};$$

égalités qui sont identiques avec (4) et (5).

QUESTIONS.

178. Par le foyer d'une ellipse on mène deux cordes rectangulaires, dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre ; les deux cordes sont égales à deux diamètres conjugués dans l'ellipse ; si par le centre on mène dans le cercle un diamètre parallèle à l'une des cordes, il est partagé par l'autre corde en deux segments égaux aux rayons vecteurs qui vont du foyer aux extrémités d'un des diamètres conjugués dans l'ellipse. (Steiner.)

179. Cinq points sont situés dans un plan et tels que trois ne sont pas en ligne droite. Il y en a toujours quatre, sommets d'un quadrilatère convexe ; par ces quatre points on mène deux paraboles ; la conique passant par les cinq points est

1° Une *parabole*, si le cinquième point est sur l'une des deux paraboles ;

2° Une *hyperbole*, si le cinquième point est dans l'*intérieur* ou *hors* des deux paraboles ;

3° Une *ellipse*, si le cinquième point est dans l'*intérieur* d'une parabole et *hors* de l'autre. (Moebius.)

BIBLIOGRAPHIE.

—

Mémoire sur la théorie mathématique de la chaleur, par Th. d'Estocquois, professeur de mathémathiques appliquées à la Faculté des sciences de Besançon. In-4° de 8 p. Besançon, 1847.

On sait combien les théories physiques des corps *impondérés* ont contribué dans ces derniers temps aux progrès de l'analyse. C'est à ces théories qu'on doit tant de beaux théorèmes sur les limites des fonctions, analogues aux limites des racines des équations dont s'occupe l'algèbre élémentaire. Une de ces fonctions surtout a acquis une grande célébrité, parce qu'on la rencontre partout, dans la mécanique céleste, dans l'acoustique, dans la physique du calorique, de l'électricité, etc. La définition de cette fonction V est écrite dans cette équation

$$\frac{dV}{dt} = a^2\left[\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right];$$

elle exprime le mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps, et a été intégrée par Fourrier et Poisson pour le cas du parallélipipède rectangle, de la sphère, du cylindroïde à base circulaire, et on connaît les beaux travaux de M. Lamé sur les surfaces isothermes. L'objet de ce mémoire est de chercher à intégrer l'équation des corps d'une forme quelconque au moyen d'une série ordonnée suivant les puissances entières du temps, série dont l'usage est soumis à plusieurs restrictions qu'il faut lire dans l'ouvrage. Tout le travail est fondé sur ce théorème :

« Soient V et V' deux fonctions d'une variable *t* et d'une

» nombre quelconque d'autres variables x, y, z, v, s, etc.,
» assujetties pour toutes leurs valeurs aux conditions

$$\frac{dV}{dt}=a^2\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\cdots\cdots\right]$$

$$\frac{dV'}{dt}=\text{ou}>a^2\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\cdots\cdots\right].$$

» a étant une constante donnée. Si, pour une certaine va» leur de t, on a $V'=$ ou $>V$, quels que soient x, y, z, » s, v..... Il en sera de même pour toutes les valeurs plus » grandes de t. »

Ce théorème n'a-t-il pas déjà été énoncé par MM. Sturm ou Liouville?

—

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BELGIQUE.

Concours de 1849.

Exposer la théorie générale des séries, considérées spécialement sous le point de vue de leur convergence.

Nous indiquerons comme source première de tous les travaux sur cette matière, les ouvrages de M. Cauchy, l'*Analyse algébrique*, les *Exercices mathématiques* et les *Comptes rendus* depuis 1838, deuxième semestre.

—

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES (*Liouville*).

Duhamel, IV, 214; Raabe, VI, 83; Binet, VI, 493; Bertrand, VII, 33; Bonnet (O), VIII, 73.

—

ŒUVRES COMPLÈTES D'ABEL (*Christiania*, 1839, 2 vol. in-4°).

Tome I, Recherches sur la série $1+mx+\frac{m.m-1}{1.2}x^2+\ldots$ p. 66; travail du plus haut intérêt, en français.

Ibid., p. III, Abel réfute le critérium donné par M. Olivier. (Voir ci-après.)

JOURNAL DE CRELLE.

Olivier (Louis) II, 31, en français; Jacobi, XII, 263, en latin; Poncelet, XIII, en français; Kummer, XIII, 171, en allemand.

DESCRIPTION DES COURBES A PLUSIEURS CENTRES, d'après le procédé de Perronet, tableaux numériques et instruction pratique pour déterminer facilement tous les éléments de l'épure; exposé des conditions générales qui régissent les courbes applicables au tracé des voûtes surbaissées, et discussion critique des méthodes principales proposées depuis Perronet; ouvrage utile aux ingénieurs, architectes, entrepreneurs, conducteurs de travaux, et servant de complément aux traités de Perronet, Gauthey, Sganzin et autres, concernant la construction des ponts. Par P. BRETON (de Champ), ingénieur au corps royal des ponts et chaussées. Paris, 1846, in-4°, VIII, 63, 1 pl. Mathias, quai Malaquais, 15.

Ce titre développé indique suffisamment l'utilité pratique que l'auteur a eue en vue. C'est une monographie complète de toutes les méthodes proposées pour décrire des systèmes de courbes dont l'ensemble a l'apparence d'une seule courbe; systèmes connus sous le nom d'*anses de paniers*. La géométrie descriptive faisant partie de l'enseignement élémentaire et devant même prochainement recevoir une notable extension, le savant travail de M. Breton sera étudié avec fruit par les professeurs qui désirent donner aux élèves des applications *réelles*, soit géométriques, soit arithmétiques. Les conditions d'élégance et de solidité auxquelles *le tracé* doit satisfaire, donne lieu à des problèmes d'analyse *aux limites* que l'auteur résout avec beaucoup d'adresse. On lira avec intérêt ce qu'il dit des *courbes continues* (46-51).

Les tableaux qui terminent le mémoire sont construits

toutes les dimensions numériques principales pour les courbes à trois, sept et onze centres.

—

NUOVO SISTEMA DI STUDI GEOMETRICI ANALITICAMENTE DEDOTTI DALLO SVOLGIMENTO SUCCESSIVO DI UNA SOLA EQUAZIONE. Del Cav. Ferdinando de LUCA. Napoli, 1847, in-8°, XIII, 244 p., 2 pl.

L'équation unique dont le développement donne tout le système géométrique est celle-ci : $c = a\cos B + b\cos A$; a, b, c, sont les trois côtés d'un triangle rectiligne, et A et B les angles respectivement opposés aux côtés a et b. L'auteur établit cette opération à l'aide de considérations *fonctionnelles* dont Legendre fait usage dans ses notes pour fonder analytiquement les principes de la géométrie, à l'instar de J. Bernoulli, qui a employé le premier ce genre de raisonnement pour démontrer le parallélogramme des forces, et auquel on doit l'importation du mot *fonction* dans la science. Toutes les propositions, sans en excepter une seule, des huit livres de Legendre, toutes les formules des deux trigonométries, sont déduites de cette équation génératrice. Véritable tour de force, qui montre la prodigieuse fécondité de l'analyse. L'auteur a cherché à réaliser cette pensée de Lagrange : *Dans l'analyse, la perfection existe à n'employer que le moindre nombre de principes, et de faire sortir de ces principes toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'analyse ; dans la méthode synthétique des lignes, elle consiste au contraire à démontrer isolément chaque proposition de la manière la plus simple, à l'aide des propositions déjà démontrées.* (*Journ. de l'Éc. Polyt.*, cahier 6, 280, an VI.)

Cet ouvrage curieux vient d'être adressé à l'Académie. L'illustre inventeur du *théorème* est chargé du rapport ; ceux qui attendent ce rapport, dans l'intérêt de leur instruction, avec une juste impatience, ont là une belle occasion de s'exercer à la patience.

SOLUZIONE DI UN PROBLEMA RELATIVO ALL' ELLISSOIDE, in-8° de 4 pages. Aprile, 1846, Roma.

NOTA SOPRA LA QUADRATURA DELLA SUPERFICIE INVILUPPO DEI PIANI PERPENDICOLARI CONDOTTI ALL' ESTREMITA DEI DIAMETRI DI UN' ELLISSOIDE DATA, de 8 pages. Ottobre, 1846, Roma.

Dans ces deux écrits, l'habile analyste traite une question analogue à celle qu'il a consacrée à l'ellipse (*voir* V, 365, 540) et ramène la quadrature aux fonctions elliptiques de première et seconde espèce, et dans la note on fait usage d'une méthode due au célèbre W. Roberts, pour simplifier la réduction d'une certaine intégrale à ces deux espèces de fonctions.

SOPRA LA RETTIFICAZIONE DELL' ELLISSI SFERICA È SULLA DIVISIONE DE' SUOI ARCHI, 23 p. 1846.

N. Fuss est le premier, je crois, qui se soit occupé de l'ellipse sphérique, vers la fin du siècle dernier (*N. acta Petrop.*, t. III). M. Chasles a ensuite étudié les propriétés de cette conique géométriquement, et M. Gudermann, par la voie analytique, en faisant usage des coordonnées sphériques. Le célèbre professeur de Munster a donné le premier la rectification de l'ellipse sphérique en la faisant dépendre d'une transcendante elliptique de troisième espèce (*Crelle*, t. XIV, 1835, en latin). Dans le présent mémoire, M. Tortolini s'occupe du même objet, en faisant usage des coordonnées rectangulaires ordinaires, et, par une belle analyse, il étend ensuite le théorème de Fagnano à l'ellipse sphérique, et celui de M. Chasles sur les arcs *semblables*; mais la différence des arcs *semblables* elliptico-sphériques est un arc de cercle (V. p. 12 du Mémoire). L'auteur donne aussi les équations pour la bissection et la trissection de l'arc. Nous ferons observer que les moyens géométriques employés pour démontrer le théorème de M. Chasles dans l'ellipse plane, sont applicables à l'ellipse sphérique (*Nouv. Ann.*, III, p. 506, 1844), et peut-être à une ellipse *géodésique* quelconque.

GRAND CONCOURS (1847).

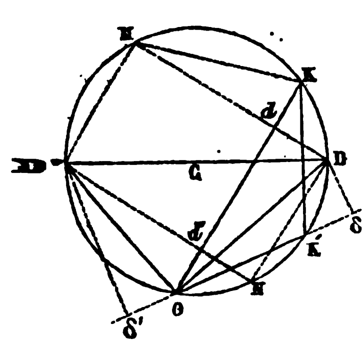
Mathématiques élémentaires.

—

Soient donnés dans un cercle une corde KK′ et un diamètre DD′ perpendiculaire à cette corde.

D'un point O de la circonférence on mène deux lignes aux extrémités du diamètre et deux lignes aux extrémités de la corde.

Il s'agit de prouver que la somme des projections des deux premières lignes sur l'une OK des deux autres, est égale à cette même ligne OK, et que la différence de ces mêmes projections est égale à l'autre ligne OK′, c'est-à-dire que d et d' étant les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités du diamètre sur la droite OK, on a



1° $Od + Od' = OK$,

2° $Od - Od' = OK'$.

PREMIER PRIX.

PAR M. SARELL (RICHARD),

Né le 15 juillet 1829, à Thérapia, près Constantinople (Turquie d'Europe), élève interne du lycée Descartes, classe de M. Lionnet.

—

Prolongeons les droites Dd, $D'd'$ jusqu'à la rencontre de la circonférence aux points M, N, et menons les cordes MK, MD′, ND. Les droites MD, ND′ étant parallèles comme perpendiculaires à une même droite OK et les angles DMD′,

DND étant droits comme inscrits dans des demi-cercles, la figure DMD'N est un rectangle, et les cordes MD', ND sont égales et parallèles entre elles, et égales et parallèles à dd'; donc on a :

$$(1)\ \text{arc}KM = \text{arc}OD'$$

et

$$(2)\ \text{arc}DK = \text{arc}DK' = \text{arc}ON.$$

Cela posé, 1° pour établir la relation $Od + Od' = OK$, comme on a $OK = Od + dK$, il suffit de démontrer que $Od' = dK$.

Les triangles rectangles KMd, $OD'd'$ ont les hypoténuses KM et OD' égales, comme sous-tendant des arcs égaux (1); de plus, les côtés Md, $D'd'$ sont égaux comme opposés dans un rectangle; donc le troisième côté dK du premier est égal au troisième côté Od' du second.

Remarque. Cette démonstration ne supposant pas que le diamètre DD' soit perpendiculaire à la corde KK', la première partie du théorème est vraie, quelle que soit la situation relative de ces deux droites.

2° On a $Od - Od' = dd' = DN$; donc, pour établir l'égalité $Od - Od' = OK'$, il suffit de démontrer qu'on a $DN = OK'$.

Or, arcDK' = arcON (2); ajoutant de part et d'autre un même arc NK', il vient :

$$\text{arc } DK'N = \text{arc } ONK';$$

donc $DN = OK'$.

Remarque I. Soient $O\delta$, $O\delta'$, les projections des droites OD OD' sur la direction de la corde OK'. Les triangles rectangles ODd, $OD\delta$ ont l'hypoténuse OD commune et les angles aigus DOd, $DO\delta$ égaux entre eux comme inscrits dans des segments égaux; donc le côté $Od = O\delta$. On prouverait de même que $Od' = O\delta'$; donc

$$O\delta + O\delta' = Od + Od' = OK,$$
$$O\delta - O\delta' = Od - Od' = OK'.$$

Ces égalités montrent que le théorème n'est plus vrai dans le sens direct de son énoncé, lorsque la corde OK', sur la direction de laquelle on projette les droites OD, OD', est située tout entière d'un même côté du diamètre DD'; car alors la somme des projections Oδ, Oδ', au lieu de leur différence, est égale à l'autre corde OK, tandis que la différence de ces mêmes projections, au lieu de leur somme, est égale à la corde OK'. Mais l'énoncé s'applique à tous les cas, si l'on regarde comme positive toute projection, telle que Od ou Od' dont la seconde extrémité est située du même côté du point O que l'autre extrémité K de la corde OK à laquelle elle se rapporte; et, comme négative, toute projection, telle que Oδ', dont la seconde extrémité est située de l'autre côté du point O par rapport à l'autre extrémité K' de la corde OK'.

Remarque II. Les mêmes constructions et les mêmes raisonnements étant applicables à une position quelconque du point O aussi rapprochée qu'on voudra de l'un des points D, D', K, K', le théorème est encore vrai lorsqu'à la limite il coïncide avec un de ces quatre points; ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement.

SUR L'EMPLOI DES SIGNES +, — EN GÉOMÉTRIE.

PAR M. A. HAILLECOURT.
professeur au lycée de Rouen.

—

MM. Briot et Bouquet, dans leur Géométrie analytique, (pages 153, 164) donnent cette nouvelle forme aux énoncés de deux théorèmes connus et de leurs réciproques :

1. Si sur les trois côtés d'un triangle, on prend trois points tels, que le produit de trois segments non consécutifs soit égal au produit des trois autres, les trois droites qui joignent ces

points aux sommets opposés passent par un même point; et réciproquement.

II. Si sur les trois côtés d'un triangle on prend trois points tels que le produit de trois segments non consécutifs soit égal et de signe contraire au produit des trois autres, ces trois points sont en ligne droite, et réciproquement.

C'est admettre implicitement que sur une droite limitée, tout segment compté à partir d'une extrémité en marchant vers l'autre est pris positivement; que tout segment compté en sens contraire est pris négativement. C'est d'ailleurs la règle que leurs auteurs appliquent à la proportion harmonique, au rapport enharmonique, etc.

Ces nouveaux énoncés, qui comprennent évidemment les anciens, seront certainement utiles, de quelque manière que se présente le système de trois points pris sur les côtés d'un triangle, soit comme élément dans le courant d'une démonstration, soit comme conclusion. Ces deux cas s'offrent simultanément dans l'exemple suivant relatif à l'hexagramme de Pascal. J'y ai été conduit en examinant, dans le cercle seulement, le cas d'un hexagone de forme quelconque inscrit. Je considérerai cependant une conique quelconque, en remarquant que, si la démonstration du théorème de Carnot nécessite pour les coniques l'emploi des coordonnées, elle ne va pas au delà de la plus simple géométrie pour le cercle.

I. Le théorème de Carnot peut s'énoncer ainsi :

Un polygone de n *côtés étant tracé sur le plan d'une courbe du* m^ième^ *degré, et chaque côté coupant la courbe en* m *points; les produits* P, P′ *des segments comptés à partir des sommets jusqu'aux points de rencontre, en parcourant le polygone d'abord dans un sens, puis en sens contraire, sont égaux. Ils sont de même signe ou de signes contraires, suivant que le produit* mn *est pair ou impair.* $P' = (-1)^{mn}P$.

Pour le cas du cercle et d'un triangle on aura $P' = P$. La géométrie le prouve complétement.

II. Comme cas particulier en géométrie analytique ; comme généralisation du théorème de Ptolémée en géométrie élémentaire, on trouve :

Un polygone de n *côtés étant coupé par* m *droites, les produits* P, P' *des segments comptés à partir des sommets jusqu'aux points d'intersection en parcourant le polygône d'abord dans un sens puis en sens contraire, sont égaux. Ils ont le même signe ou des signes contraires, suivant que* mn *est pair ou impair.*

$$P' = (-1)^{mn} P.$$

Pour un triangle coupé par trois transversales, on a $P' = -P$.

Soit maintenant un hexagone quelconque H inscrit dans une conique (*).

Soit ABC le triangle obtenu en prolongeant jusqu'à leurs rencontres trois côtés non consécutifs (1), (3), (5). Ils sont coupés en neuf points : α, α', α'' sur BD ; β, β', β'' sur AC ; δ, δ', δ'' sur AB par les trois autres cotés (2), (4), (6). — Sur ces neuf points, six, par exemple α, α', β, β', δ, δ', sont les sommets de l'hexagone ou les points d'intersection de la conique et du triangle ; les trois autres points α'', β'', δ'', où se coupent respectivement (1) et (4), (2) et (5), (3) et (6), sont ceux qu'il faut prouver être en ligne droite.

Or, en vertu des principes précédents, on a :

$$A\delta.\ A\delta'.\ B\alpha.\ B\alpha'.\ C\beta.\ C\beta' = A\beta.\ A\beta'.\ B\delta.\ B\delta'.\ C\alpha.\ C\alpha'.$$
$$A\delta.\ A\delta'.\ A\delta''.\ B\alpha.\ B\alpha'.\ B\alpha''.\ C\beta.\ C\beta'.\ C\beta'' = -\ A\beta.\ A\beta'.\ A\beta''.$$
$B\delta.\ B\delta'.\ B\delta''.\ C\alpha.\ C\alpha'.\ C\alpha''$; d'où divisant,

$$A\delta''.\ B\alpha''.\ C\beta'' = -\ A\beta''.\ B\delta''.\ C\alpha''.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

Ce qui ne laisse plus aucun doute sur la position des trois points α'', β'', δ''.

Si maintenant on examine attentivement les démonstrations données dans les livres les plus estimés, même dans la géométrie de position, on se convaincra que, hors le cas d'un hexagone convexe, il n'est pas évident que les trois points soient en ligne droite plutôt que sur trois droites concourant aux sommets du triangle employé plus haut et désigné par ABC.

CONCOURS DE 1847 (t. VI, p. 377, fig. 56) (*).

Solution analytique.

PAR V. PRÉVOTEL,
Élève du lycée Descartes.

I. La solution de la question paraît devoir être simplifiée en prenant pour axes des coordonnées deux des côtés du triangle PQR. Soient donc QR l'axe des x, et PR l'axe des y.

Représentons les longueurs des côtés QR et PR par $2p$ et $2q$, et les distances de l'origine R aux points de contact de la ligne du second ordre et des axes, par α et β.

Ceci posé, l'équation générale d'une ligne du deuxième ordre tangente aux axes, est

$$(1)\quad \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + 2Bxy + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\beta}\right) - 2\left(\frac{x}{\alpha}\right) + 1 = 0.$$

II. Pour exprimer toutes les conditions de l'énoncé, il faut indiquer que le côté PQ est tangent à la courbe (1).

(*) Dans la figure 56 remplacez C par c et c par C.

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne $y=mx+n$ soit tangente à cette courbe, est

$$\left[B-\frac{1}{\alpha\beta}\right]\left[\frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)n^2+\left(\frac{m}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)n-m\right]=0.$$

Cette égalité peut être satisfaite de deux manières, soit en annulant le premier facteur, soit en annulant le second. Dans le premier cas, la courbe est remplacée par deux droites; nous laisserons donc ce cas à part, et annulant le second facteur, nous aurons la relation

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)n^2+\left(\frac{m}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)n-m=0.$$

III. La droite PQ a pour équation

$$\frac{x}{2p}+\frac{y}{2q}=1.$$

Servons-nous de la relation (2) pour exprimer que cette droite est tangente à la courbe proposée, et remplaçons m par $-\frac{q}{p}$ et n par $2q$: on trouve alors :

$$(3)\qquad 2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-2\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)+1=0.$$

ou

$$p\left[\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)q-\frac{2}{\alpha}\right]+q\left[\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)p-\frac{2}{\beta}\right]+1=0.$$

Posons, pour simplifier :

$$\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)q-\frac{2}{\alpha}=Q$$

et

$$\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)p-\frac{2}{\beta}=P,$$

et la relation précédente devient :

$$(4)\qquad pQ+qP+1=0.$$

IV. Les coordonnées des points A, B, C sont

$$\begin{array}{lll} A & x=p; & y=o, \\ B & x=o; & y=q, \\ C & x=p; & y=q, \end{array}$$

et les équations des droites AB, AC, BC

$$(5)\left\{\begin{array}{ll} AB & \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \\ AC & x=p, \\ BC & y=q. \end{array}\right.$$

V. Désignons par M, M′, M″ les coefficients angulaires des droites Aa, Bb, Cc; comme ces droites passent par les points A, B, C, leurs équations seront

$$(6)\left\{\begin{array}{ll} Aa & y=M(x-p), \\ Bb & y-q=M'x, \\ Cc & y-q=M''(x-p). \end{array}\right.$$

Ces droites sont tangentes à la ligne du deuxième ordre, donc leurs coefficients doivent satisfaire à la relation (2) : on trouvera ainsi pour déterminer chacun de ces coefficients une équation du deuxième degré ; l'une des racines est la valeur cherchée, et l'autre est le coefficient angulaire de l'un des côtés du triangle PQR ; ces coefficients sont connus. On peut donc supprimer les racines correspondantes, et en définitive, on trouve :

$$(7)\left\{\begin{array}{ll} \text{pour } Aa & pPM+2\left(\frac{p}{\alpha}-1\right)=0, \\ \text{pour } Bb & 2M'\left(\frac{q}{\beta}-1\right)+qQ=0, \\ \text{pour } Cc & PM''+Q=0. \end{array}\right.$$

IV. La recherche des deux premières relations n'offre

aucune difficulté ; on remplace dans l'expression (2) m par M ou M' et n par $-Mp$ ou par q : on supprime dans le premier cas le facteur M.

Pour la troisième relation, on remplace m par M'' et n par $q-M''p$, et on trouve :

$$\frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\left(M''p-q\right)^2-\left(\frac{M''}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(M''p-q\right)-M''=0.$$

Posons $M''p+q=N$, et mettons à la place de M'' la valeur en fonction de N, on aura :

$$\left[\frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\frac{1}{p\beta}\right]N^2-\left[2q\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{p\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{2q}{p\beta}+\frac{1}{p}\right]N$$
$$+2\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)q^2-2q\left(\frac{q}{p\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{q}{p}=0.$$

Multiplions par $2p$, nous aurons :

$$\left[\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)p-\frac{2}{\beta}\right]N^2-2\left[2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)-\frac{2q}{\beta}+1\right]N$$
$$+q\left[2\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)pq-2\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)+1\right]=0.$$

Mais l'équation (3) prouve que le terme indépendant de N est nul ; le premier membre est ainsi divisible par N ou par $M''p+q$; si on égale ce facteur à 0, on trouve $M''=-\frac{q}{p}$, ce qui vérifie le résultat que nous avions annoncé. Le coefficient de N^2 est évidemment égal à P, donc l'équation devient :

$$PN-2\left[2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)-\frac{2q}{\beta}+1\right]=0.$$

Or l'équation (3) nous donne encore :

$$2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)+1=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}.$$

Donc le terme indépendant de N est égal à $-2\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)$.

Remplaçons N par $M''p+q$, nous aurons :

$$M''pP=2\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)-qP=-Qp,$$

et enfin

$$M''P+Q=0.$$

VII. Cherchons maintenant les coordonnées des points a, b, c : en se servant des équations (5) et (6), on obtient :

Pour a $\quad x_1=p+\frac{q}{M} \qquad y_1=q.$

Pour b $\quad x_2=p \qquad y_2=M'p+q,$

Pour c $\quad x_3=\frac{p^2M''}{pM''+q}$ et $y_3=\frac{q^2}{pM''+q}.$

Ces trois points seront en ligne droite, si leurs coordonnées rendent identique l'expression

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3},$$

on trouve :

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=-\frac{q}{pMM'}$$

et

$$\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{q}{pM'M''+q(M'+M''}.$$

A l'aide des équations (7), on déduit :

$$qM''=\frac{2M'\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P};$$

donc

$$\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{q}{M'\left[pM''+q+\frac{2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}$$

$$=\frac{q}{M'\left[-\frac{pQ}{P}+q+\frac{2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}=\frac{q}{M'\left[\frac{Pq-pQ+2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}$$

$$=\frac{q}{pM'\left[\frac{2\left(\frac{p}{\alpha}-1\right)}{pP}\right]}=\frac{q}{-pMM'};$$

donc $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$. C. Q. F. D.

THÉORÈME

sur les diagonales des polygones.

—

Théorème. Le nombre des points intérieurs d'intersection des diagonales d'un polygone convexe est égal au nombre des sommets pris *quatre à quatre* (*).

Démonstration. Je remarque d'abord que si je savais passer du nombre des points d'intersection formés par un polygone de $m-1$ côtés au nombre des points d'intersection formés par le polygone de m côtés, comme le quadrilatère n'ayant que deux diagonales a un point d'intersection, je pourrais de là m'élever au nombre des points d'intersection formés par un polygone de cinq côtés, puis en six et généraliser la formule pour résoudre le problème proposé. Nous avons donc d'abord un problème auxiliaire à résoudre.

(*) Ce théorème a été énoncé et démontré au lycée Charlemagne, classe de M. Delorme.

Pour cela soit proposé le polygone convexe ABCDEF, fig. 25, de n côtés et désignons par P_n le nombre des points d'intersection. Dans ce polygone menant la diagonale FB, qui sépare le triangle FAB, je nomme A opposé à BF, le sommet extérieur; il restera, le polygone FBCDE de $n-1$ côtés et qui donnera un certain nombre P_{n-1} de points d'intersection. Si je joints AC, je séparerai de même un triangle ABC, où B est sommet extérieur, et il restera un polygone de $n-1$ côtés donnant aussi P_{n-1} intersections, et comme il y a n sommets j'aurai n fois P_{n-1} intersections. Or, si je considère la formule $+\, n\, P_{n-1}$ je remarque facilement que tous les points d'intersection des diagonales du polygone donné s'y trouvent, mais qu'elles s'y trouvent répétées plusieurs fois.

Voyons donc par quoi il faut diviser $n\,P_{n-1}$. Un point d'intersection est donné par deux diagonales et chaque diagonale par deux sommets; donc un point est donné par quatre sommets. D'après cela, il est facile de voir que ce point se trouvera dans tous les polygones de $n-1$ côtés dont le triangle séparé n'a pas pour sommet extérieur l'un des quatre sommets d'où dépend le point considéré. *Ainsi ce point d'intersection se trouve dans* n—4 *polygones de* n—1 *côtés*. Donc dans la formule $n\,P_{n-1}$ chaque point est compté $n-4$ fois. Ainsi, nous aurons le nombre des points en divisant $n\,P_{n-1}$ par $n-4$.

Donc $$P_n = \frac{n\,P_{n-1}}{n-4}$$

ou bien $$(n-4)\,P_n = n\,P_{n-1}$$

et de là $$(n-5)\,P_{n-1} = n-1\,P_{n-2}$$

$$(n-6)\,P_{n-2} = n-2\,P_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$2\,P_6 = 6\,P_5$$

$$1\,P_5 = 5\,P_4$$

multipliant par ordre, il vient :

$$1.2.3.4\,P_n = n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,P_4;\ \text{mais}\ P_4 = 1$$

donc. $$P_n = \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$ c. q. f. d.

Observation I. Le nombre des diagonales est

$$\frac{n\,(n-3)}{2} = n';$$

le nombre total des intersections, tant intérieures que hors du polygone, est donc $\frac{n'\,(n'-1)}{2}$; retranchant de ce nombre total le nombre des points d'intersection intérieurs, il reste, réduction faite, pour les points d'intersection extérieurs

$$\frac{n+1.\,n.\,n-3.\,n-4.}{3.\ 4.}$$

Observation II. Les mêmes théorèmes subsistent pour les polygones sphériques.

RÉDUCTION

d'un postulatum de M. Catalan au postulatum d'Euclide.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Deux droites indéfinies étant situées dans un même plan, si la première a deux points situés de côté et d'autre de la seconde, elle rencontre celle-ci.

« Cette proposition, » dit M. Catalan dans la préface de son Traité de géométrie, « est aussi importante que le fameux » postulatum d'Euclide; cependant on l'admet sans scrupule,

» et l'on fait bien, attendu qu'en géométrie, comme en toute
» autre branche des connaissances humaines, il existe un
» petit nombre de propositions dont la vérité ne paraît pas
» contestable, et qui néanmoins ne peuvent être démontrées
» d'une manière rigoureuse. »

Je crois que l'opinion exprimée par M. Catalan offre quelque danger ; il serait assurément très-regrettable que l'on étendît sans une absolue nécessité le nombre des vérités non susceptibles d'être démontrées. C'est ce que les anciens avaient parfaitement compris ; aussi en ont-ils resserré le cercle le plus qu'il leur a été possible, et les barrières qui les ont arrêtés sont les mêmes qui nous arrêtent encore. L'admiration que les éléments d'Euclide ont excitée et exciteront toujours, vient peut-être moins de l'enchaînement des propositions que du petit nombre de principes d'une évidence incontestée qui servent de fondement à cet impérissable édifice.

On trouverait difficilement, il est peut-être impossible de formuler aujourd'hui une proposition qui ne puisse être démontrée avec le seul secours des principes et des axiomes sur lesquels repose la géométrie ancienne. Je vais faire voir que l'énoncé de M. Catalan est dans ce cas.

A et B (le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure) étant deux points situés de part et d'autre de la droite L, il s'agit de démontrer que la droite AB rencontre nécessairement L. On voit bien qu'en faisant tourner autour de A une droite indéfinie, elle rencontrera nécessairement le point B dans quelqu'une de ses positions. Comment démontrer qu'alors elle rencontre la droite L ? C'est là toute la difficulté.

Il est bien clair que si l'on pouvait déterminer deux points P, Q sur cette droite, tels que B se trouvât dans l'angle formé par les droites AP, AQ, cette difficulté serait levée, parce que la droite mobile, en allant de la position AP à la position AQ, ne cesserait pas de rencontrer PQ ou L,

passerait par B dans une position intermédiaire. La question se réduit ainsi à déterminer deux points P, Q tels que l'angle PAQ contienne le point B. Cette recherche dépend des deux lemmes suivants.

1[er] Lemme. *Dans le triangle isocèle les angles adjacents à la base sont aigus.*

On sait que ces angles sont égaux entre eux, et que la médiane qui aboutit au milieu de la base est perpendiculaire à cette dernière. Si les angles dont il s'agit étaient obtus, les prolongements des côtés formeraient avec la même base des angles aigus du côté de la médiane prolongée, et, en vertu du postulatum d'Euclide, iraient rencontrer cette médiane en un même point. On pourrait donc aller de ce point au sommet par trois lignes droites différentes, la médiane et les deux côtés, c'est-à-dire qu'il y aurait entre deux points plusieurs lignes droites distinctes, contrairement à un axiome connu.

Ces angles ne peuvent pas être droits, car en prolongeant la médiane d'une longueur égale à elle-même, et joignant le point ainsi obtenu aux extrémités de la base, on aurait un nouveau triangle égal au triangle proposé, et les côtés de l'un, à cause de l'hypothèse admise, seraient les prolongements des côtés de l'autre. On retomberait ainsi sur le cas précédent de trois lignes droites distinctes tirées entre deux points.

Donc les angles à la base du triangle isocèle ne sauraient être obtus, ni droits; donc ils sont nécessairement aigus. C. Q. F. D.

Corollaire. *Dans le triangle rectangle, les angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.*

Car le triangle rectangle peut toujours être regardé comme la moitié d'un triangle isocèle ayant pour base le

double de l'un des côtés de l'angle droit, et pour médiane l'autre côté, et cela de deux manières différentes.

2e Lemme. *D'un point pris hors d'une droite, on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

On reconnaît sans peine que la démonstration de cette proposition est présentée par les auteurs de manière à supposer l'admission du *postulatum* de M. Catalan, il faut donc la changer ici.

A étant le point donné hors de la droite et P un point de celle-ci pris à volonté, joignez AP. Si les deux angles formés au point P de part et d'autre de PA ne sont pas droits, portez du côté de la droite où est l'angle aigu PQ = PA, et tirez AQ; le triangle PAQ sera isocèle. Faites tourner ce triangle autour de PQ de manière à le placer en PBQ, je dis que le point B tombera dans l'angle PAQ. Car les angles PQA, APQ sont aigus, le premier d'après le lemme précédent, le second par construction; les angles APB, AQB, égaux respectivement à 2APQ, 2AQP, sont l'un et l'autre moindres que deux angles droits. D'où il résulte que PB, QB sont, par rapport aux côtés AP, AQ et à leurs prolongements du même côté que PQ. Donc le point B est dans l'angle PAQ.

Cela posé, si une droite indéfinie se meut autour du sommet A de cet angle, et va de la position AP à la position AQ, elle rencontrera nécessairement le point B dans une certaine position intermédiaire; et comme cette droite traversera toujours PQ pour sortir du triangle APQ, il s'ensuit que la droite AB rencontrera nécessairement PQ.

On démontrerait, comme à l'ordinaire, que AB est perpendiculaire sur PQ, etc. Donc on peut toujours d'un point pris hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite. C. Q. F. D.

Abordons maintenant la proposition qui forme l'objet de cet article.

7

THÉORÈME : *Deux droites indéfinies étant situées dans un même plan, si la première a deux points situés de côté et d'autre de la seconde, elle rencontre celle-ci.*

En effet, des points A, B donnés sur la première droite de part et d'autre de la seconde L, j'abaisse sur celle-ci les perpendiculaires AP, BQ. Si les pieds P, Q de ces perpendiculaires ne coïncident pas, je tire MQ, BP. On aperçoit de suite que le point B est dans l'angle PAQ, car chacun des angles APB, AQB, composé d'un angle droit et d'un angle aigu (cor. lemme 1er) est moindre que deux droits. Donc la droite AB coupe nécessairement PQ. C. Q. F. D.

Note. Une ligne plane *infinie* partage le plan en deux régions *infinies*, dont la ligne forme la frontière, est la limite commune. Deux points sont dits situés de *côté et d'autre* de cette limite, lorsque pour aller d'un point à l'autre sur un chemin continu, il faut traverser cette limite. Si l'on veut se rendre compte des mots que l'on prononce, on ne peut attacher un autre sens à cette locution, *de côté et d'autre*. S'il en est ainsi, je ne comprends pas la nécessité et même les sujets de ces divers théorèmes. Que dirait-on de la proposition suivante? Deux endroits sont situés de côté et d'autre de l'Océan, démontrer que pour aller de l'un à l'autre, il faut traverser l'Océan? Il y a encore d'autres propositions de ce genre auxquelles je ne comprends rien. Ainsi des géomètres démontrent sérieusement que pour aller d'un point situé dans *l'intérieur* d'une circonférence à un autre point situé à *l'extérieur*, il faut traverser la *circonférence*. Que signifient donc ces mots *intérieur* et *extérieur* d'une enceinte, sinon qu'il faut percer l'enceinte pour venir de l'un à l'autre? En mathématique il n'est pas excessivement rare de voir *démontrer* des *définitions*; c'est chose ordinaire en philosophie.

SOLUTION DE LA QUESTION 156 (1847, p. 394).

PAR M. PAUL SERRET.
(Lycée Monge, classe de M. VINCENT.)

—

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3} \quad \text{(W. Roberts).}$$

Démonstration. L'équation polaire de la lemniscate de Bernoulli est $\rho = a \,.\, \cos^{\frac{1}{2}} 2\omega$.

Soit P la projection orthogonale du centre O de la courbe sur la tangente au point M.

Soit OX l'axe polaire, et posons $\mathrm{OM} = \rho'$; $\mathrm{MOX} = \omega'$; $\mathrm{OP} = \rho$; $\mathrm{POX} = \omega$.

Appelons α l'angle PMO; on sait que l'on aura :

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{\rho'}{\text{dérivée de } \rho'}.$$

Or,

$$\rho' = a\sqrt{\cos 2\omega'} = a\sqrt{1-2\sin^2\omega'};\quad \mathrm{D}.\rho' = \frac{-4a^2 \sin\omega' . \cos\omega'}{2a\sqrt{\cos 2\omega'}} =$$

$$= -\frac{a \sin 2\omega'}{\sqrt{\cos 2\,\omega'}};$$

on aura donc :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos 2\,\omega'}{\sin 2\,\omega'} = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\,\omega'}.$$

D'où il suit que l'angle α est le complément de l'angle $2\omega'$;

mais l'angle α est aussi le complément de l'angle POM, donc ang. POM $= 2\omega'$; et de plus $\omega' = \frac{1}{3}\omega$.

Or le triangle rectangle POM donne

$$\rho = \rho' . \cos \text{POM} = \rho' \cos \frac{2}{3}\omega\,; \quad \rho' = a\sqrt{\cos\frac{2\omega}{3}};$$

on a donc

$$\rho = a \cos^{\frac{3}{2}} . \frac{2}{3}\omega\,, \text{ ou bien } \rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos\frac{2\omega}{3}$$ pour l'équation du lieu cherché, c. q. f. d.

SOLUTION DE LA QUESTION 170 (t. VI, p. 454).

PAR M. PAUL SERRET.

---

abc, ABC étant deux triangles rectilignes situés dans le même plan, les quatre sommets b, c, B, C étant fixes, on donne la relation

$$\frac{ab}{\text{AB}} = \frac{ac}{\text{AC}} = \text{constante} = \frac{1}{m}.$$

Si le sommet a décrit une ligne plane algébrique divisée par la droite bc en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrira une ligne du même degré, divisée en deux parties égales et symétriques par la droite BC (Jacobi).

Démonstration. Sans changer la nature du lieu décrit par le sommet A, nous pourrons évidemment transporter le côté BC sur le côté bc, de manière que leurs directions coïncident, et que leurs milieux se trouvent au même point o que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires, bc étant l'axe des x.

Soient $ob = oc = a$; $oB = oC = \alpha$; x, y les coordonnées du point a ; x', y' les coordonnées du point correspondant A. D'après l'énoncé de la question l'équation du lieu des points a sera de la forme

$$\varphi(x, y^2) = 0, \qquad (1)$$

c'est-à-dire qu'elle ne contiendra que des puissances paires de y.

Or on a :

$$\overline{ab}^2 = (x-a)^2 + y^2 \,; \quad \overline{ac}^2 = (x+a)^2 + y^2$$
$$\overline{AB}^2 = (x'-\alpha)^2 + y'^2 \,; \quad \overline{AC}^2 = (x'+\alpha)^2 + y'^2.$$

On aura donc, d'après l'énoncé de la question, les deux égalités suivantes :

$$(2) \qquad (x'-\alpha)^2 + y'^2 = m^2(x-a)^2 + m^2y^2 \,;$$
$$(3) \qquad (x'+\alpha)^2 + y'^2 = m^2(x+a)^2 + m^2y^2.$$

Retranchant (3) de (2) membre à membre, l'on trouve $4\alpha x' = 4am^2.x$, d'où

$$(a) \qquad x = nx', \text{ en posant } n = \frac{\alpha}{m^2a}.$$

Remplaçant x par nx' dans (2), on en tire :

$$y^2 = \frac{(x'-a)^2 - m^2(nx'-a)^2 + y'^2}{m^2},$$

ou bien

$$(b) \qquad y^2 = Ly'^2 + Mx'^2 + Nx' + P.$$

Portant ces valeurs de x et y^2 dans l'équation (1), nous aurons :

$$\varphi(nx'^2 Ly'^2 + Mx'^2 + Nx' + P) = 0 \qquad (4)$$

pour l'équation du lieu du sommet A ; on voit que cette équation est du même degré que l'équation du lieu du point a, et que, comme celle-ci, elle ne contient que des

puissances paires de l'ordonnée y'^2, ce qui montre que le lieu des sommets A est divisé par la droite BC en deux parties égales.

SOLUTION DE LA QUESTION 171 (t. VI, p. 455).

PAR M. PAUL SERRET.

Théorème. $abcd$, ABCD étant deux tétraèdres, les six sommets b, c, d, B, C, D demeurant fixes, on donne la relation

$$\frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC}=\frac{ad}{AD}=\text{constante}=\frac{1}{m}.$$

Si le sommet a décrit une surface algébrique, divisée par le plan bcd en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une surface du même degré, divisée de même par le plan BCD en deux parties égales et symétriques (Jacobi).

Démonstration. Sans changer la nature de la surface décrite par le sommet A, on peut faire coïncider les plans bcd, BCD, et de plus les disposer de manière que les directions des côtés bc, BC coïncident et qu'ils aient leurs milieux au même point o, que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires, bc étant l'axe des x, et le plan bcd étant le plan des xy.

Soient $ob=oc=a$; b, c les coordonnées du point α sur le plan xy.

Soient $o\text{B}=o\text{C}=\alpha$; β, γ les coordonnées du point D sur le plan xy.

Soient x, y, z les coordonnées du point a, dans l'une quelconque de ses positions, et soient x', y', z' les coordonnées du point A dans la position correspondante.

L'équation de la surface décrite par le point a sera de la forme

(1) $$\varphi(x, y, z^2) = 0;$$

et l'on aura, d'après l'énoncé de la question, les trois égalités suivantes :

(2) $$(x' - \alpha)^2 + y'^2 + z'^2 = m^2(x-a)^2 + m^2y^2 + m^2z^2;$$

(3) $$(x' + \alpha)^2 + y'^2 + z'^2 = m^2(x+a)^2 + m^2y^2 + m^2z^2;$$

(4) $$(x' - \beta)^2 + (y' - \gamma)^2 + z'^2 = m^2(x-b)^2 + m^2(y-c)^2 + m^2z^2.$$

Retranchant (3) de (2), on obtient : $4\alpha x' = 4m^2ax$, d'où

(a) $$x = nx', \text{ en posant } n = \frac{\alpha}{m^2a}.$$

Retranchant (4) de (2), on obtient :

$$2(\beta - \alpha)x' + 2\gamma y' + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 2m^2(b-a)x + \\ + 2m^2cy + m^2(a^2 - b^2 - c^2).$$

Or de cette égalité en y, remplaçant x par sa valeur (a), on tirera une égalité de cette forme

(b) $$y = Ax' + By' + C.$$

Enfin, remplaçant x et y par leurs valeurs (a) et (b) dans l'équation (2), on en tire :

(c) $$z^2 = Mz'^2 + Ny'^2 + Px'y' + Qx'^2 + Ry' + Sx' + T.$$

Donc enfin, en remplaçant x, y, z^2 par leurs valeurs (a), (b), (c) dans l'équation (1), nous aurons :

(5) $$\varphi(nx', Ax' + By' + c, Mz'^2 + \text{etc}\ldots) = 0$$

pour l'équation de la surface décrite par le point A. Or cette équation est du même degré que l'équation (1), et, comme cette dernière, elle ne contient que des puissances paires de z^2, d'où il suit que, en outre, le lieu des points A est divisé par le plan BCD en deux parties égales et symétriques. Donc le théorème est démontré.

SOLUTION DE LA QUESTION 172 (t. VI, p. 454).

PAR M. EM. LAFONGE,
Élève au Collége militaire de La Flèche.

Problème. Étant donnés un arc et sa corde, trouver le rayon (Vincent).

Fig. 26. *Solution*. Supposons le problème résolu, et soit OB le rayon du cercle cherché, AB la corde donnée, que je représente par 2C, et $\widehat{AmB}$ l'arc que je représente par 2A. Décrivons un cercle concentrique avec un rayon quelconque OD, et joignons les extrémités A et B de la corde AB au centre O.

Les rayons OA, OB coupent le cercle OD, dont j'appelle R le rayon connu, aux points C et D; joignons CD; on a :

$$\frac{\text{arc } \widehat{CD}}{\text{corde } \overline{CD}} = \frac{\text{arc } \widehat{AB}}{\text{corde } \overline{AB}}.$$

Appelons $2x$ la longueur CD et $2a$ la longueur de l'arc $\widehat{CD}$. Le triangle rectangle OID nous donne $x = R \sin \frac{a}{R}$. Mais on a la proportion $a : x :: A : C$; d'où $a = \frac{Ax}{C}$; donc $x = R \sin \frac{Ax}{CR}$; on obtiendra donc x par l'intersection de la droite $y = x$ avec la sinussoïde $y = R \sin \frac{Ax}{CR}$.

Je prends pour axes de coordonnées des droites rectangulaires qui se croisent au centre O du cercle, et, de plus, je prends l'axe des abscisses perpendiculaire sur la corde CD.

La bissectrice de l'angle des axes, qui est la droite $y=x$, est Ox'. Je vais chercher les principales circonstances de la courbe $y=\text{R}\sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}$. Pour que y atteigne son maximum ou son minimum, il faut que pour le maximum on ait $\sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=1$, et pour le minimum, $\sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=-1$. Donc le maximum de y est R, et son minimum — R. Menant donc au cercle (R) deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, la courbe est tout entière comprise dans leur intervalle. Pour que $y=\text{R}$, nous venons de voir qu'il fallait que $\sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=-1$. Donc $\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, k étant assujetti à être entier, mais pouvant être positif ou négatif, ou même devenir nul. De là on tire :

$x=\frac{\text{CR}}{\text{A}}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Faisons successivement $k=0=1=2$....

et portons les longueurs trouvées pour x en OM, MM', M'M''.... La courbe passe en G, G', G''...., où les perpendiculaires à l'axe des x coupent les parallèles à cet axe, les perpendiculaires étant menées par les points M, M', M''.... Pour que l'on ait $y=0$, il faut que

$$\text{R}\sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=0 \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\text{A}x}{\text{CR}}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{A}x}{\text{CR}}=k\pi\,;$$

donc $x=\frac{\text{CR}}{\text{A}}\cdot k\pi$. Alors, donnant à k différentes valeurs, nous porterons sur l'axe des x les valeurs correspondantes oP, PP'.... de x. Il est facile de voir que les points M, M'.... sont les milieux de ces distances, par les expressions même qui les ont données.

Si l'on cherche le coefficient angulaire de la tangente, on trouvera pour ce coefficient, que j'appelle tang ω :

$$\tang \omega = \frac{A}{C} \cos \frac{Ax}{CR}.$$

Par suite, on voit qu'aux points G, G'.... la tangente est parallèle à l'axe des x, et qu'aux points O, P, P'.... on a :

$$\tang \omega = \pm \frac{A}{C}, \quad \text{donc} \quad \omega > 45°.$$

Décrivant la courbe par points, en donnant à x des valeurs particulières, et en s'aidant des tangentes que l'on déterminerait pour plusieurs points, on trouvera qu'elle coupe la bissectrice au point P ; donc, pour ce point on a :

$$x = R \sin \frac{Ax}{CR}.$$

Par conséquent, EF, ordonnée de ce point, est égale à x ; nous portons cette demi-corde dans le cercle R en CI, et nous la prolongerons jusqu'en D. Alors, joignant OD et OC, nous mènerons une corde AB parallèle à D et égale à 2C, la longueur OB sera le rayon cherché.

Note. Il est plus simple de prendre $R = 1$; construisons la courbe $y \sin x = x$; aux valeurs de x égales à $\pm \pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$..., etc. répondent des asymptotes qui comprennent entre elles, alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x, les diverses branches de la courbe ; les maxima et minima correspondent aux diverses valeurs de x qui satisfont à l'équation $x = \tang x$ (voir t. I, p. 247). Menant à la distance $\frac{A}{C}$ une parallèle à l'axe des abscisses, elle coupera le système des courbes en une infinité de points ; on aura une infinité de valeurs pour x. Soit X une de ces valeurs, le rayon cherché répondant à cette valeur est $\frac{A}{X}$.

On peut aussi résoudre la question par une règle de fausse position et par le retour des séries (voir p. 11). Tm.

SUR UNE CONIQUE CIRCONSCRITE

à cinq points ou inscrite à un pentagone.

—

I. *Lemme.* Cinq points étant dans un même plan, dont trois points quelconques non en ligne droite, il y en a au moins quatre, sommets d'un quadrilatère convexe.

Démonstration. Prenons quatre points, sommets d'un quadrilatère à angle rentrant; prolongeant dans les deux sens les six droites qui passent par ces points pris deux à deux, l'espace du plan sera partagé : 1° en six régions fermées trilatères; 2° en six régions ouvertes bilatères; 3° en six régions ouvertes trilatères. Faisant la figure, il est facile de se convaincre par intuition que, dans quelqu'une de ces dix-huit régions qu'on place un cinquième point, il formera, avec trois des quatre points donnés, au moins un quadrilatère convexe.

II. *Théorème de Mœbius.* Cinq points étant situés dans un plan dont trois points quelconques sont en ligne droite, il y a au moins quatre points, sommets d'un quadrilatère convexe (lemme I); par ces quatre points passent deux paraboles. Si le cinquième point est situé 1° sur l'une des paraboles, elle est évidemment la conique qui passe par les cinq points; 2° dans l'intérieur ou hors des deux paraboles, la conique passant par les cinq points est une hyperbole; 3° dans l'intérieur d'une parabole et hors de l'autre, la conique est une ellipse.

Démonstration. Soient A, B, C, D, E les cinq points, et A, B, C, D quatre d'entre eux, sommets d'un quadrilatère convexe; prenant O intersection des côtés opposés

AB, CD pour origine des coordonnées, BAO pour axe des x, et DCO pour axe des y, on aura pour équation d'une conique passant par les quatre points :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (1)$$

Dans cette équation, à l'exception de B, tous les coefficients sont connus. Le quadrilatère étant convexe, A et C sont de même signe ; les deux paraboles qui passent par ces quatre points sont données par la double équation

$$Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}\,xy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (2)$$

Soient x', y' les coordonnées du cinquième point E et le produit $x'y'$ positif, alors on peut le supprimer comme facteur dans les inégalités. Supposons ce point 1° dans l'intérieur des deux paraboles (2), et sur la conique (1) ; remplaçant x et y par x', y', l'équation (1) s'annule, et l'équation double (2) donne deux résultats *négatifs* (II, p. 112). On a donc par soustraction, les deux inégalités $+2\sqrt{AC} - B < 0$, $-2\sqrt{AC} - B < 0$; la première inégalité donne $B > 2\sqrt{AC}$; donc la conique (1) est une hyperbole. 2° Le point est hors des deux paraboles. Le même raisonnement conduit aux inégalités $+2\sqrt{AC} - B > 0$, $-2\sqrt{AC} - B > 0$; or la seconde inégalité est impossible, à moins que B ne soit négatif ; alors les deux inégalités deviennent $2\sqrt{AC} + B > 0$, $-2\sqrt{AC} + B > 0$; d'où $B > 2\sqrt{AC}$; ce qui donne encore une hyperbole. 3° Le point est hors de la parabole $(+2\sqrt{AC})$ et dans l'intérieur de la parabole $(-2\sqrt{AC})$; on a donc $+2\sqrt{AC} - B > 0$, $-2\sqrt{AC} - B < 0$; donc $2\sqrt{AC} > B$, et la conique (1) est une ellipse. 4° Le point E est dans la parabole $(+2\sqrt{AC})$ et hors de la parabole $(-2\sqrt{AC})$; on a donc $+2\sqrt{AC} - B < 0$, $-2\sqrt{AC} - B > 0$; cette dernière inégalité ne peut subsister qu'avec B négatif ;

mais alors la première inégalité est impossible ; donc ce cas ne peut exister pour $x'y'$ positif. Supposons maintenant le produit $x'y'$ négatif, et repassons par les mêmes hypothèses. En supprimant le facteur $x'y'$, on devra changer le signe de l'inégalité ; ainsi, pour la première hypothèse, on aura $2\sqrt{AC}-B>0$, $-2\sqrt{AC}-B>0$. Cette dernière inégalité est impossible, à moins que B ne soit négatif et que l'on n'ait $B>2\sqrt{AC}$; ce qui caractérise l'hyperbole. La deuxième hypothèse donne $2\sqrt{AC}-B<0$, $-2\sqrt{AC}-B<0$; donc encore $B>2\sqrt{AC}$. L'hypothèse (3) donne $2\sqrt{AC}-B<0$, $-2\sqrt{AC}-B>0$; cas impossible. Enfin l'hypothèse (4) donne $2\sqrt{AC}-B>0$, $-2\sqrt{AC}-B<0$; d'où $2\sqrt{AC}>B$; caractère de l'ellipse. Ainsi le théorème énoncé par M. Moebius (Calcul Barycentrique, p. 382) est démontré.

Remarque. Ce théorème est démontré par une méthode bien plus compliquée, par M. Bruun d'Odessa. (Crelle, XVI, 215. 1835.)

III. On peut aussi trouver l'espèce de la conique par des constructions géométriques. En effet, au moyen de l'hexagramme de Pascal, on peut mener par les cinq points donnés A, B, C, D, E, des tangentes à la courbe non décrite, en se servant de la règle comme instrument. Ayant un pentagone circonscrit, par les *diagonales* de Newton, on obtient cinq diamètres ; mais deux suffisent. Si ces deux diamètres sont parallèles, la conique est une parabole ; s'ils ne sont pas parallèles, leur intersection O est le centre. Joignant le point O au point de rencontre T de deux tangentes passant par A et B et soit I l'intersection de OT et AB : si I est entre T et O, la conique est une ellipse. Dans toute autre position, la conique est une hyperbole. Si O est entre T et I, les points A et B appartiennent à deux branches différentes, et si T est entre O et I, les deux points A et B sont sur la même branche.

IV. Pour connaître l'espèce de la conique inscrite à un pentagone, il suffit, par les *diagonales* de *Brianchon*, de déterminer les cinq points de contact, et le problème est ramené au précédent.

V. Il suit du théorème de M. Moebius, que si cinq sphères de même diamètre sont posées au hasard sur un plan horizontal, il y a infiniment plus de probabilité que les cinq centres sont sur une même hyperbole que sur une ellipse, et infiniment plus de probabilité pour une ellipse que pour une parabole.

VI. *Problème*. Cinq points matériels parcourent d'un mouvement uniforme donné, différent pour chaque mobile, cinq droites données dans un plan. Quelle est l'espèce de la conique passant par les cinq points au bout d'un temps assigné ?

M. Paul Serret nous a adressé une démonstration du même théorème, très-exacte, mais moins directe et plus compliquée. La marche est inverse. On suppose que la conique est une ellipse, et on prouve qu'elle a tous ses points dans l'intérieur d'une parabole et hors de l'autre. Les discussions, d'ailleurs bien faites, sur les positions respectives de diamètres conjugués dans les trois coniques, amènent des longueurs que l'on évite dans la méthode que nous avons suivie (*). Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

—

Cours d'arithmétique à l'usage des élèves qui se destinent aux écoles du gouvernement ou à toute autre école spéciale. Par A. Guilmin, ancien élève de l'Ecole Normale, profes-

---

(*) Une solution parvenue trop tard, et meilleure que la nôtre, de M. Leseurre, élève de l'institution Barbet, paraîtra prochainement.

seur à Paris. 1847. In-8°, VIII, 352. Chez Carilian-Gœury et Vve Dalmont, libraires, quai des Augustins, n°s 39 et 41.

Les géomètres qui lisent connaissent les beaux travaux, les ingénieuses et savantes conjectures de MM. Chasles et Vincent sur l'origine de notre numération chiffrée. Ce sont de précieux matériaux pour l'histoire de l'Arithmétique, sur laquelle on possède déjà divers essais, mais qui ne pourra être complète que lorsqu'on aura analysé les principaux ouvrages composés sur cette science, chez les peuples qui l'ont cultivée. Ce serait une erreur de croire qu'il règne là-dessus une parfaite uniformité ; elle n'existe même pas pour le nombre des règles fondamentales. Nous en admettons quatre et les Indiens en comptent huit. Ainsi le premier chapitre du *Lilavati* est une exposition du système des mesures, des poids et des monnaies, et le deuxième chapitre contient, outre la numération *décuple*, nos quatre règles et ensuite les quatre suivantes : élévation au carré, extraction de racines carrées; élévation au cube, extraction de racines cubiques. On remarque aussi des différences dans quelques procédés. On devra, pour que ces analyses aient un intérêt vraiment historique, distinguer les ouvrages purement didactiques de ceux qui ayant un but spécial, ont aussi une marche spéciale. Les premiers seuls donnent une idée juste de l'état complet des connaissances à l'époque de leur composition, tandis que les autres, d'une utilité déterminée, n'ont ainsi qu'une portée restreinte, adaptée à l'objet qu'on a en vue. Tel est le *Cours* actuel dont le titre annonce le but spécial et qui est encore mieux expliqué dans ces paroles de l'avant-propos : « Exposer l'arithmétique d'une manière rationnelle et méthodique, mettre entre les mains des élèves un cours écrit, » complet *au point de vue des examens*, et dans lequel tout » fût à étudier, tel a été le but que je me suis proposé. » Le succès que l'ouvrage a acquis depuis sa récente apparition,

et les suffrages flatteurs que les hommes compétents lui ont accordé, montrent mieux que tous les raisonnements, que l'auteur a atteint son but. Le fond étant irréprochable, nous sommes réduit le plus souvent à de minutieuses observations sur la forme.

L'ouvrage est divisé en deux parties, suivies d'un appendice.

La première partie, qu'on a oublié d'*intituler*, contient, outre les notions *préliminaires*, sept chapitres, et une portion du huitième appartient à la deuxième partie, intitulée *application*; coupure qui ne semble pas convenable.

Dans les notions préliminaires (p 2) l'auteur dit qu'il parlera plus tard des nombres *fractionnaires* et *incommensurables*. Alors pourquoi en parler maintenant? Même l'épithète de nombre *entier* ne doit être employée que quand on est arrivé aux fractions; c'est là sa véritable place.

Ecriture d'un nombre (p. 7), c'est-à-dire la manière d'écrire un nombre. On a omis de dire que la $n^{ème}$ tranche ternaire porte pour nom le quantième $n-2$ latinisé avec la terminaison en *illion*. Ce n'est qu'au moyen de cette convention qu'on peut lire et écrire les grands nombres, par exemple, avec 148 chiffres. On peut aussi dans ce cas, comme fait Archimède dans son Arénaire (I. p. 515), adopter des ordres quinaires, décennaires, etc. Cette observation est d'une immense importance pour les candidats à l'École Polytechnique. En 1847, un élève qui, d'après notre appréciation personnelle, méritait d'être admis au moins dans les dix premiers, a été déclaré inadmissible pour n'avoir pas su lire assez promptement un *grand nombre* d'après la méthode de l'examinateur. Ce résultat n'a rien de surprenant pour ceux qui connaissent le cœur humain. Lorsqu'au tribunal d'un examen, le candidat se montre supérieur au juge, sa cause est perdue.

Soustraction (p. 12). On trouve à la fin de l'opération (p. 15), un théorème dont on a besoin pour la commencer.

Multiplication (p. 15). « La multiplication de deux nombres entiers *a pour but* de trouver un troisième nombre, » composé d'autant de fois le premier nombre donné, qu'il » y a d'unités dans le second. »

Cette définition, calquée sur celle d'Euclide, est plus claire et s'adapte à la multiplication fractionnaire. En débarrassant cette définition d'une locution vicieuse, elle devient très-bonne. On peut dire : la multiplication est une opération dont le but est, etc.

Les *principes relatifs à la multiplication* (p. 21) ne me semblent pas être exposés d'une manière méthodique et claire, tellement que l'auteur lui-même, dit à la fin : « Cette dé» monstration ne semble pas comprendre le cas de deux facteurs (p. 24). » N'est-ce pas par là, dût-on faire comme tout le monde, qu'il fallait commencer ?

Division (26). Très-bonne théorie délayée en cinq pages sans compter de longues notes au bas de ces pages. On fait usage de *signes* qui n'ont pas été expliqués. Pourquoi n'avoir pas mis ces signes au commencement de l'ouvrage ?

Divisibilité des nombres (p. 40). Le nombre 2 doit être mentionné expressément parmi les nombres premiers. Les *caractères* de divisibilité sont des conséquences immédiates des résidus de la progression décuple, base de la numération, etc. C'est donc à cette théorie des *résidus* qu'il convient de rattacher la *divisibilité* ; alors tout devient général, facile et simple, et certes il ne faudrait pas quatre pages (56 à 60) pour établir la divisibilité du seul nombre 11.

La suite des nombres premiers est illimitée (p. 51). S'il y avait un *dernier* nombre premier, le produit continuel de 1 jusqu'à ce *dernier nombre* et augmenté d'une unité, serait évidemment un nombre premier, ce qui implique contradiction.

Table des nombres premiers (p. 52) d'après le crible d'Ératosthène.

Théorie du plus grand commun diviseur (p. 54). Très-complète. Les noms que portent certains nombres, tels que multiplicande, multiplicateur, diviseur, etc., provenant de l'usage le plus fréquent auquel servent ces nombres, ne pourrait-on pas dénommer de même le plus grand commun diviseur, de son usage le plus fréquent, qui est de simplifier les rapports, et le nommer le *simplificateur?* Par là on abrégerait le discours et l'on éviterait une abréviation disgracieuse.

Théorème. *Tout nombre premier absolu qui divise un produit doit diviser au moins un des facteurs de ce produit* (p. 61).

On donne pour raison que s'il ne divise pas un facteur en divisant le produit, il doit diviser l'autre facteur. Il y a ici quelque omission.

Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers (63 à 76). Est donnée avec un développement tel qu'il ne reste rien à chercher aux élèves.

On lit à la page 86 un théorème sur l'addition de fractions égales, terme à terme. C'est le théorème connu que dans une proportion géométrique la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, et qu'on démontre de nouveau à la page 197. C'est une observation utile (p. 91), qu'on n'a la *certitude* d'avoir le plus petit dénominateur commun possible de plusieurs fractions que lorsque chaque fraction est irréductible. Il y a là deux fautes typographiques indiquées dans l'errata et une troisième qui est omise. A la ligne 10 en remontant, au lieu de $\frac{33}{52}$, il faut lire $\frac{39}{52}$.

La théorie des fractions ordinaires est complète et ne laisse aucune question d'examen sans réponse; elle termine le quatrième chapitre.

Le cinquième renferme les fractions décimales. Nous recommandons de rechef aux élèves la lecture des fractions décimales à figures nombreuses ; on les lit comme s'il s'agissait d'un nombre entier ; ensuite, pour connaître la dénomination, on ajoute mentalement un chiffre de plus à gauche ; on cherche d'après la règle donnée ci-dessus (p. 111) le nom de la dernière tranche à gauche, et à la terminaison en *illion*, on substitue celle en *illionième*. L'oubli de cette règle a eu maintes fois une influence funeste sur le sort des candidats.

La théorie des fractions périodiques satisfait à toutes les exigences. Si, comme nous avons dit, l'on donnait les propriétés des résidus de la progression décuple, on en déduirait d'abord la théorie de la *divisibilité*, et ensuite aussi facilement le théorème de Fermat, dont les *fractions* dites *périodiques* sont une conséquence immédiate. Mais cela rendrait toutes ces théories trop générales, trop courtes, trop faciles : trois inconvénients graves, que nos auteurs d'éléments évitent avec raison ; car, pour donner de l'activité à l'esprit des étudiants, il faut des discours longs, des raisonnements embarrassants. Il est même singulier qu'on n'ait pas encore donné ces deux précieuses qualités à l'addition des nombres entiers. Cela viendra peut-être ; il ne faut jamais désespérer du progrès. (*La fin prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION 161 (t. VI, p. 272).

PAR M. MENTION,
élève en spéciales (classe de M. Richard).

—

Soient A et A' deux points d'une ellipse, AN, A'N deux normales se rencontrant en N, n et n' les grandeurs de ces

normales, p et p' les distances du centre aux tangentes passant par A et A', d le demi-diamètre parallèle à la corde AA', on a : 1° $np+n'p'=2d^2$; 2° si l'on mène les deux autres normales passant par N, on a $np+n'p'+n''p''+n'''p'''=$ constante ; 3° si A' se réunit à A, on a $np=d^2$, où n est le rayon de courbure ; 4° cette dernière expression s'applique au rayon de courbure d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, d étant le demi-diamètre parallèle à la tangente. (Joachimsthal).

Je ne démontre que les trois premières parties.

I. Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points A et A' ; m étant le coefficient angulaire du diamètre dont la longueur est $2d$, $d^2=\dfrac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}$ (a, b représentent les demi-axes de l'ellipse), ou, comme $m=-\dfrac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}$,

$$2d^2=\frac{a^4(y'+y'')^2+b^4(x'+x'')^2}{a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y''}\ ;$$ on a les équations

$$c^4y^4+2b^2c^2\beta y^3+b^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)y^2-2b^4c^2\beta y-b^6\beta^2=0\ ;$$
$$c^4x^4-2a^2c^2\alpha x^3+a^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)x^2+2a^4c^2\alpha y-a^6\alpha^2=0$$

(voyez t. VI, p. 367);

$$-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''},$$

dans lesquelles α,β représentent les coordonnées du point N.

Si l'on combine l'une des équations

$$b^2\beta x'-a^2\alpha y'+c^2x'y'=0,\quad b^2\beta x''-a^2\alpha y''+c^2x''y''=0$$

avec la relation

$$-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''},$$

on arrive à

$$\alpha=\frac{b^2c^2x'x''(x'+x'')}{a^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')};\ \beta=-\frac{a^2c^2y'y''(y'+y'')}{b^2(a^2b^2+b^2x'x''+ay'y'')}.$$

II. 1° Abaissant du centre de l'ellipse O les perpendiculaires OP, OQ sur les normales, on a $AP = p$; $A'Q = p'$. Le cercle dont ON est le diamètre passe par les points P et Q, et les *puissances* des points A et A' par rapport à ce cercle sont précisément les valeurs de np et $n'p'$. Or l'équation du cercle est $x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y = 0$; donc les puissances seront égales à

$$x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y', \quad x''^2 - \alpha x'' + y''^2 - \beta y''.$$

$$np + n'p' = (x' + x'')^2 + (y' + y'')^2 - \alpha(x' + x'') - \beta(y' + y'').$$

Cette expression devient, en mettant pour α, β les valeurs indiquées ci-dessus, et réduisant au même dénominateur,

$$\frac{\begin{gathered}(x'+x'')^2(a^4b^4+a^2b^4x'x''+a^4b^2y'y''-b^4c^2x'x'') + \\ +(y'+y'')^2(a^4b^4+a^2b^4y'y''+b^2a^4x'x''+a^4c^2y'y'') - \\ -2(x'x''+y'y'')\,a^2b^2\,(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')\end{gathered}}{a^2b^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')}.$$

Le dénominateur étant celui de $2d^2$, au facteur a^2b^2 près, il faut prouver que le numérateur est égal à

$$a^2b^2[a^4(y'+y'')^2 + b^4(x'+x'')^2].$$

Ce numérateur, par des réductions évidentes, se transforme en

$$a^4b^4(x'+x'')^2 + a^4b^4(y'y'')^2 + 2(b^4x'x'' + a^4y'y'')$$
$$(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'') - 2a^2b^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')(x'x''+y'y'')$$
$$= 2(a^2b^2 + b^2x'x'' + a^2y'y'')(b^4x'x'' + a^4y'y'' - a^2b^2x'x'' -$$
$$- a^2b^2y'y'') + a^4b^4(x'+x'')^2 + a^4b^4(y'+y'')^2 \ldots$$
$$= 2(a^2-b^2)(a^2y'y'' - b^2x'x'')(a^2b^2 + b^2x'x'' + a^2y'y'') +$$
$$+ a^4b^4(x'+x'')^2 + a^4b^4(y'+y'')^2 \ldots$$
$$= 2a^2b^2(a^2-b^2)(a^2y'y'' - b^2x'x'') + 2(a^2-b^2)(a^4b^4 - a^2b^4x'^2 -$$
$$- a^2b^4x''^2) + a^4b^4(x'+x'')^2 + a^4b^4(y'+y'')^2,$$

parce que

$$a^2y'^2 \,.\, a^2y''^2 = (a^2b^2 - b^2x'^2)(a^2b^2 - b^2x''^2).$$

Occupons-nous du facteur de a^2b^2, qui est

$$2(a^2-b^2)(a^2y'y''-b^2x'x'')+2(a^2-b^2)(a^2b^2-b^2x'^2-b^2x''^2)+$$
$$+a^2b^2x'^2+2a^2b^2x'x''+a^2b^2x''^2+a^2b^2y'^2+2a^2b^2y'y''+a^2b^2y''^2$$
$$=2a^4y'y''+2b^4x'x''+2a^4b^2-a^2b^2x'^2-a^2b^2x''^2-2a^2b^4+$$
$$+2b^4x'^2+2b^4x''^2+a^2b^2y'^2+a^2b^2y''^2$$
$$=b^4(x'+x'')^2+2a^4y'y''+2a^4b^2-a^4b^2+a^4y'^2-a^4b^2+$$
$$+a^4y''^2-2a^2b^4+b^2(b^2x'^2+a^2y'^2)+b^2(b^2x''^2+a^2y''^2)=$$
$$=b^4(x'+x'')^2+a^4(y'+y'')^2 \dots \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. Soient i, i' les angles NAF, NA'F, F étant le foyer. Substituant pour p, p', $a\cos i$, $a\cos i'$ dans l'égalité $np+n'p'=2d^2$, il vient $n\cos i+n'\cos i'=2\frac{d^2}{a}$. On a donc ce théorème :

« *La somme des lignes obtenues en projetant les longueurs de deux normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement l'ellipse, sur les rayons vecteurs de ces points, est égale à la corde focale parallèle à la droite qui les joint.* »

Si les deux points sont symétriques par rapport au grand ou au petit axe, on obtient la projection de la normale terminée au grand ou au petit axe $\left(\frac{b^2}{a}, a\right)$.

2° $np+n'p+n''p''+n'''p'''$. Soient B, B' les deux autres points dont les coordonnées seront $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$.

Cette somme égale

$$x'^2+x''^2+x_1^2+x_2^2+y'^2+y''^2+y_1^2+y_2^2-$$
$$-\alpha(x'+x''+x_1+x_2)-\beta(y'+y''+y_1+y_2)$$
$$=(x'+x''+x_1+x_2)^2-2P_2(x)+(y'+y'')+y_1+y^2)^2-$$
$$2P_2(y)-\alpha(x'+x''+x_1+x_2)-\beta(y'+y''+y_1+y_2)\ ;$$

et l'on n'a plus qu'à porter les valeurs des sommes et des produits tirés des équations c^4x^4-, etc., etc.; c^4y^4+, etc., etc. Le résultat final est $2(a^2+b^2)$. Ainsi d' étant le demi-diamètre parallèle à BB', on a $d^2+d'^2=a^2+b^2$.

Remarque. « *Les quatre lignes obtenues en projetant les longueurs de quatre normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement la courbe, sur les rayons vecteurs de ces points, est constante.* »

3° Si les deux points A, A′ se confondent, $2np = 2d^2$; $np = d^2$, n représentant le rayon de courbure. Cette valeur n'est autre que celle qui a été donnée par M. Abel Transon (voir t. III, p. 596). Remarquant que

$$d^2 = \frac{b^2}{\cos^2 i},\ p = a\cos i,\ \text{on a}\ n = \frac{b^2}{a\cos^3 i}$$

(ce qui est la valeur donnée par un *abonné*, t. IV, p. 258).

Note. Une démonstration plus directe du beau théorème de M. Joachimsthal est à désirer.

NOUVEAUX THÉORÈMES ALGÉBRIQUES

relatifs au système de deux équations entre deux variables ;

Par M. C. G. J. JACOBI, professeur ordinaire de mathématiques, à Kœnigsberg.
(Crelle, XIV, 281, 1835.)

I.

De tous les théorèmes qu'on donne dans les éléments d'algèbre, il en existe à peine un seul plus utile, principalement dans les équations, que le suivant :

« X étant une fonction rationnelle entière de x, on a :

$$\Sigma \left(\frac{U}{\frac{dX}{dx}} \right) = 0,$$

» si on étend la somme à toutes les racines de l'équation » $X=0$, et si U est une autre fonction quelconque rationnelle » et entière de x, d'un ordre inférieur de deux unités à la » fonction X. »

Dans ce qui suit, nous démontrerons comment on étend ce théorème au système de deux équations algébriques entre deux variables. Soient f, φ des fonctions rationnelles entières de x et de y, qui montent respectivement au $\mu^{ième}$ et $\nu^{ième}$ degré. Supposons que w soit le degré des équations finales qui proviennent de l'élimination de l'une et de l'autre variable des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Soient ces équations finales :

$$X=0,\quad Y=0,$$

l'une en x et l'autre en y. Supposons de plus que M, N, P, Q soient les fonctions multiplicatrices, les plus simples, rationnelles, entières, au moyen desquelles on obtienne identiquement :

$$Mf+N\varphi=X,$$
$$Pf+Q\varphi=Y;$$

soit enfin

$$MQ-NP=V,$$

nous désignerons par

$$[x^\alpha, y^\beta]$$

une fonction rationnelle entière en x et y dans laquelle x^α, y^β sont les plus hautes puissances de x, y qui se trouvent dans cette fonction, et soit

$$f=[x^\alpha, y^\beta],\quad \varphi=[x^\gamma, y^\delta].$$

On aura, d'après les principes algébriques connus :

$$M=[x^{w-\alpha}, y^{\delta-1}];\ N=[x^{w-\gamma}, y^{\beta-1}]$$
$$P=[x^{\gamma-1}, y^{w-\beta}];\ Q=[x^{\alpha-1}, y^{w-\delta}],$$

d'où $V=MQ-NP=[x^{w-1}, y^{w-1}]$.

Or M et P sont de degré $w-\mu$, et N, Q de degré $w-\nu$, donc V est de degré $2w-\mu-\nu$.

Supposons que $x=x_1$, $y=y_1$; $x=x_2$, $y=y_2$;..... $x=x_w$, $y=y_w$ soient les racines simultanées des équations

$$f=0, \varphi=0.$$

Toutes les fois que $x=x_m$, $y=y_n$, m n'étant pas égal à n, satisfait aux équations $X=Mf+N\varphi=0$; $Y=Pf+Q\varphi=0$, mais pas aux équations, $f=0$, $\varphi=0$ comme de ces équations, on déduit $Vf=0$; $V\varphi=0$; donc $V=0$.

« $V_{m,n}$ désignant la valeur que prend l'expression MQ—NP, » en posant en même temps $x=x_m$, $y=y_n$, lorsque m et » n seront différents, on aura $V_{mn}=0$, ou bien V s'éva- » nouira pour toutes les racines des équations finales qui ne » sont pas racines simultanées des équations proposées. »

Différentiant par rapport à x et à y les identités $Mf+N\varphi=X$; $Pf+Q\varphi=Y$, et mettant après la différentiation les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$, il vient:

$$Mf'(x)+N\varphi'(x)=X'; \; Pf'(x)+Q\varphi'(x)=0,$$
$$Mf'(y)+N\varphi'(y)=0; \; Pf'(y)+Q\varphi'(y)=Y'.$$

Posons pour abréger:

$$f'(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)f'(y)=R;$$

il vient : $R.M=+X'\varphi'y$, $R.P=-Y'\varphi'(x)$,

$R.N=-X'f'y$, $R.Q=+Y'f'(y)$,

d'où $RV=X'Y'$.

Nous voyons donc qu'en substituant dans V les racines simultanées des équations, on obtient le même résultat que si l'on substitue ces valeurs dans l'expression $\frac{X'Y'}{R}$, ou désignant par X'_m, Y'_m, R_m les valeurs que prennent X', Y',

R pour les racines simultanées x_m, y_n des équations $f=0$, $\varphi=0$, on obtient $V_{m,n}=\frac{X'_m . Y'_n}{R_m}$.

II.

Dans l'expression V, les variables x, y pris séparément montent, comme nous avons vu ci-dessus, au degré $w-1$, par conséquent à un degré moindre d'une unité que dans X et Y qui sont de degré w. On aura par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles

$$\frac{V}{X.Y}=\Sigma\frac{V_{m,n}}{X'_m, Y'_n(x-x_m)(y-y_n)}.$$

La somme étant étendue à toutes les valeurs des indices m, n comprises dans la suite 1, 2, 3..... w; mais dans les w^2 expressions que la somme comprend, toutes celles dans lesquelles m, n sont diverses s'évanouissent, comme il a été dit ci-dessus; il ne reste donc que les termes ou $m=n$; d'où l'équation précédente se change en celle-ci :

$$\frac{V}{X\,Y}=\Sigma\frac{V_{m,m}}{X'_m, Y'_m(x-x_m)(y-y_m)}=\Sigma\frac{1}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}$$

C'est une équation très-remarquable.

On en tire :

$$V=\frac{1}{R_1}(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_w)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_w)$$

$$+\frac{1}{R_2}(x-x_1)(x-y)\ldots(x-x_w)(y-y_1)(y-y_3)\ldots(y-y_w)$$

etc.,

en supposant toutefois qu'on ait rendu le coefficient de la plus haute puissance de x dans X et de y dans Y égal à l'unité.

Soit U une fonction rationnelle entière de x et de y et

U_m la valeur de U pour $x=x_m$; $y=y_m$; on peut poser $U=U_m+W(x-x_m)+W'(y-y_m)$, W et W' étant des fonctions de x, y rationnelles et entières.

D'où

$$\frac{U}{(x-x_m)(y-y_m)}=\frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)}+\frac{W}{y-y_m}+\frac{W'}{x-x_m}.$$

Développons ces diverses fractions selon les puissances descendantes de x et de y; la première fraction du second membre est la seule dans ce membre qui fournisse des puissances de x multipliées par des puissances de y; elles sont donc les mêmes que celles qui sont données par

$$\frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)};$$

donc, en développant l'expression

$$\frac{UV}{XY}=\Sigma\frac{U}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}$$

selon les puissances descendantes de x et de y, les termes provenant de la multiplication des puissances négatives de x par les puissances négatives de y sont les mêmes qu'en développant

$$\Sigma\frac{U_m}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}=\frac{U_1}{R_1(x-x_1)(y-y_1)}+\frac{U_2}{R_2(x-x_2)(y-y_2)},$$

ou bien dans le développement de $\frac{UV}{XY}$ le coefficient de

$$x^{-\alpha-1}y^{-\beta-1} \text{ est } \frac{x_1{}^\alpha y_1{}^\beta U_1}{R_1}+\frac{x_2{}^\alpha y_2{}^\beta U_2}{R_2}+\ldots\frac{x_\omega{}^\alpha y_\omega{}^\beta U_\omega}{R_\omega},$$

d'où, en posant U=R,

en développant suivant les puissances descendantes de x et de y l'expression $\frac{RV}{XY}$, le coefficient du terme

$$x^{-(\alpha+1)}y^{-(\beta+1)} \text{ est } x_1{}^\alpha y_1{}^\beta+x_2{}^\alpha y_2{}^\beta\ldots\ldots x_\omega{}^\alpha y_\omega{}^\beta.$$

Ce qui précède peut servir à trouver la valeur des expressions

$$x_1^{\alpha} y_1^{\beta} + x_2^{\alpha} y_2^{\beta} + \ldots\ldots x_w^{\alpha} y_w^{\beta},$$

laquelle, lorsque ni α ni β ne sont nuls, se trouve péniblement par les méthodes ordinaires.

III.

V ne peut monter qu'au degré $2w-\mu-\nu$; XY est de degré $2w$; donc $\frac{V}{XY}$ ne peut monter qu'au degré $-(\mu+\nu)$; le terme général du développement est

$$\left(\frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}{R_1} + \ldots \frac{x_w^{\alpha} y_w^{\beta}}{R_w}\right) x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)};$$

par conséquent ce terme est nul toutes les fois qu'on a $\alpha+\beta+2<\mu+\nu$; de là :

Théorème.

Soient φ, f des fonctions quelconques rationnelles entières; soient $x=x_1$, $x=x_2 \ldots x=x_w$; $y=y_1$, $y=y_2 \ldots y=y_w$, toutes les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$; soit ensuite R_m la valeur de l'expression

$$f'x\, \varphi' y - f'(x)\, \varphi'(x)$$

pour $x=x_m$, $y=y_m$; alors l'expression

$$\frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}{R_1} + \frac{x_2^{\alpha} y_2^{\beta}}{R_2} + - \ldots \frac{x_w^{\alpha} y_w^{\beta}}{R_w} = 0,$$

α et β désignant des nombres entiers positifs dont la somme, augmentée de deux unités, est moindre que la somme des degrés des équations $f=0$, $\varphi=0$.

De là cet autre théorème :

Théorème.

Soient f, φ des fonctions quelconques de x et de y, rationnelles et entières; soit F une autre fonction quelconque des mêmes variables, rationnelle et entière, et d'un degré moindre de trois unités que les sommes des degrés de f et de φ, alors

$$\Sigma \frac{F}{f'x\varphi'y - f'y\varphi'x} = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de x et de y qui sont racine simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Nous donnerons un seul exemple pour confirmer ce remarquable théorème. Soient f, φ du second degré; dans ce cas, on peut déterminer la constante λ, de manière que $f+\lambda\varphi$ puisse se décomposer en deux facteurs linéaires, et cela de trois manières, par les trois racines de l'équation cubique dont dépend la valeur de λ; soient λ', λ'' deux de ces valeurs diverses, et soit $\pi=f+\lambda'\varphi=tu$; $\Phi=f+\lambda''\varphi=vw$; t, u, v, w désignent des fonctions linéaires. Les racines des équations $f=0$, $\varphi=0$ sont les mêmes que celles des équations $\pi=0$, $\Phi=0$, qui peuvent se décomposer en ces quatre systèmes d'équations linéaires :

1) $t=0$, $v=0$; d'où suit $x=x_1$, $y=y_1$;
2) $t=0$, $w=0$; $x=x_2$, $y=y_2$;
3) $u=0$, $v=0$, $x=x_3$, $y=y_3$;
4) $u=0$, $w=0$, $x=x_4$, $y=y_4$;

d'où s'ensuit :

$$t=\alpha[x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2]$$
$$u=\beta[x(y_3-y_4)-y(x_3-x_4)+x_3y_4-y_3x_4]$$
$$v=\gamma[x(y_1-y_3)-y(x_1-x_3)+x_1y_3-x_3y_1]$$
$$w=\delta[x(y_2-y_4)-y(x_2-x_4)+x_2y_4-y_2x_4]$$

α, β, γ, δ étant des constantes.

, pour abréger,

$+\Delta_1 = x_2(y_3 - y) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)$
$-\Delta_2 = x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4)$
$+\Delta_3 = x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1)$
$+\Delta_4 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)$,

duit :

$$\frac{dt}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = -\alpha\gamma\Delta_4$$

$$\frac{dt}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = +\alpha\delta\Delta_3$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = +\beta\gamma\Delta_2$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx} = -\beta\delta\Delta_1.$$

$'(x)\Phi'(y) - \pi'(y)\Phi'(x) = -\alpha\gamma\Delta_4 uw + \alpha\delta\Delta_3 uv +$
$w - \beta\delta\Delta_1 tv = (\lambda'' - \lambda')\,[f'x\varphi'y - f'y\varphi'x] = (\lambda'' - \lambda')R.$

l observer que

$$x,\ y,\ t,\ u,\ v,\ w$$

l simultanément les valeurs

$$x_1,\ y_1,\ 0,\ -\beta\Delta_2,\ 0,\ \delta\Delta_3,$$
$$x_2,\ y_2,\ 0,\ +\beta\Delta_1,\ \gamma\Delta_4,\ 0,$$
$$x_3,\ y_3,\ -\alpha\Delta_4,\ 0,\ -\delta\Delta_1,$$
$$x_4,\ y_4,\ +\alpha\Delta,\ 0,\ -\gamma\Delta_2,\ 0.$$

donc :

$$\frac{-\lambda'}{\gamma\delta} = \frac{\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{R_1} = \frac{\Delta_3\Delta_4\Delta_1}{R_2} = \frac{\Delta_4\Delta_1\Delta_2}{R_3} = \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{R_4}.$$

ès le théorème, on doit avoir :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 0,$$

$$\frac{x_1}{R_1} + \frac{x_2}{R_2} + \frac{x_3}{R_3} + \frac{x_4}{R_4} = 0,$$

$$\frac{y_1}{R_1} + \frac{y_2}{R_2} + \frac{y_3}{R_3} + \frac{y_4}{R_4} = 0.$$

Substituant les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4 il vient les identités évidentes :

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0,$$
$$x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3 + x_4 \Delta_4 = 0,$$
$$y_1 \Delta_1 + y_2 \Delta_2 + y_3 \Delta_3 + y_4 \Delta_4 = 0.$$

Kœnigsberg, 13 juin 1835.

Note. Tous les géomètres connaissent le beau mémoire analytico-géométrique de M. Liouville, relatif à ces théorèmes de M. Jacobi (*Journ. de mathém.*, VI, p. 345. 1841).

ANNONCE.

Complément des éléments d'arithmétique, comprenant la théorie des nombres négatifs ; divers problèmes et théorèmes relatifs aux quantités commensurables ; le binôme de Newton ; le calcul des probabilités ; la théorie des limites ; la théorie des nombres incommensurables ; les fractions continues ; la théorie des logarithmes considérés comme exposants, et la théorie des approximations numériques, par E. Lionnet, professeur au lycée Descartes, in-8°, 1848 ; chez Dezobry, rue des Mâçons-Sorbonne, 1. Prix : 2 fr. 50 c.

La seconde édition de l'arithmétique du même auteur et augmentée d'une table de matières, vient de paraître.

SOLUTION DE LA QUESTION 177.

PAR M. LEGALLAIS,
Élève du Collége militaire de La Flèche.

Donner une discussion complète du lieu géométrique d'un

point tel, que si de là l'on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés, leur rectangle soit constant. (Strebor.)

Commençons par chercher l'équation générale, sans faire d'abord aucune hypothèse sur les données qui sont le rayon R, la distance des centres d, et la valeur m^2 du rectangle des tangentes.

Comme tout est évidemment symétrique autour de la ligne des centres OO' (*fig.* 18) et de même autour de la perpendiculaire CY menée au milieu C de OO', je prends ces deux droites pour axes de coordonnées.

Cela posé, soit m un point du lieu. Je mène de ce point la tangente mR au cercle (OR) et la tangente mR' au cercle (OR').

La condition du lieu est que $m\mathrm{R}.m\mathrm{R}'=\mathrm{R}^2$. De là je déduis

$$m\mathrm{R}^2.m\mathrm{R}'^2=m^4,\text{ ou }\left(\overline{\mathrm{O}m}^2-\overline{\mathrm{OR}}^2\right)\left(\overline{\mathrm{O}'m}^2-\overline{\mathrm{O}'\mathrm{R}'}^2\right)=m^4,$$

$$\text{ou }\left[y^2+\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2-\mathrm{R}^2\right]\left[y^2+\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2-\mathrm{R}^2\right]=m^4;$$

ou, réduisant les termes semblables, et ordonnant par rapport à y,

$$y^4+\left(2x^2-2\mathrm{R}^2+\frac{1}{2}d^2\right)y^2+\left(x^2-\frac{1}{4}d^2\right)^2-$$
$$-\mathrm{R}^2\left(2x^2+\frac{1}{2}d^2\right)+\mathrm{R}^4-m^4=0.$$

Résolvant, et effectuant sous le radical toutes les réductions, j'obtiens définitivement :

$$y^2=\left(\mathrm{R}^2-\frac{1}{4}d^2\right)-x^2\pm\sqrt{d^2x^2+m^4}.$$

La forme de cette équation indique tout d'abord la symétrie parfaite que la géométrie nous a déjà fait reconnaître par rapport aux deux axes coordonnées. Puis, $d^2x^2+m^4$ étant toujours positif, quelle que soit la valeur de x, la discussion

relative aux conditions de réalité de y doit porter sur la valeur et sur le signe du terme $R^2 - \frac{1}{4}d^2$.

La géométrie et l'algèbre se trouvent donc ici parfaitement d'accord relativement aux points à discuter.

Le cas où les cercles sont extérieurs sans se toucher se traduira par $d > 2R$, ou $R^2 - \frac{1}{4}d^2 < 0$; le cas où ils sont tangents extérieurement par $d = 2R$, ou $R^2 - \frac{1}{4}d^2 = 0$; le cas où ils se coupent par $d < 2R$, ou $R^2 - \frac{1}{4}d^2 > 0$; celui où ils sont tangents intérieurement par $d = 0$. Enfin, il y aura à examiner le cas singulier où chaque cercle se réduit à un point, c'est-à-dire $R = 0$.

Ainsi, voilà les hypothèses que nous allons examiner successivement, en commençant par les plus remarquables :

$$R = 0,\ d = 0,\ d < 2R,\ d = 2R,\ d > 2R.$$

Premier cas.

$R = 0$. Les deux cercles se réduisent alors à leurs centres, et par suite les tangentes se confondent avec $\overline{Om}$ et $O'm$ (*fig.* 18). Le lieu demandé devient donc le lieu géométrique des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes soit constant.

C'est la courbe connue sous le nom d'ovale ou ellipse de Cassini. Son équation, facile à obtenir directement, et qui se déduit de l'équation générale trouvée plus haut en y faisant $R = 0$, et posant, pour simplifier $\frac{d}{2} = D$, est

$$y^2 = -(x^2 + D^2) + \sqrt{4D^2x^2 + m^4},$$

le signe — du radical ayant dû évidemment être écarté, comme ne donnant aucune valeur réelle de y.

Pour que y soit réel, il faut que $x^2 + D^2$ soit $< \sqrt{4D^2x^2 + m^4}$,

ou $x^4-2D^2x^2+D^4-m^4<0$. Ainsi, x^2 doit être compris entre les racines de l'équation $x^4-2D^2x^2+D^4-m^4=0$, qui sont $x_{\prime}^2=D^2+m^2$, $x_{\prime\prime}^2=D^2-m^2$.

Dans tous les cas, on voit que la courbe est limitée en tous sens; mais il y a évidemment, pour connaître la forme exacte, à examiner successivement les hypothèses $D<m$, $D=m$, $D>m$.

Pour $D<m$, il n'y a à adopter que la limite $x_{\prime}^2=D^2+m^2$; la seconde, étant négative, doit être rejetée. La courbe ne rencontre l'axe des x qu'en deux points situés de part et d'autre de l'origine à une distance égale à $\sqrt{D^2+m^2}$; elle a pour centre l'origine et offre d'ailleurs une grande ressemblance avec l'ellipse.

Pour $D>m$, les deux limites sont convenables; il y a avec l'axe des x quatre points de rencontre déterminés par les abscisses $x'=\pm\sqrt{D^2+m^2}$, $x''=\pm\sqrt{D^2-m^2}$; la courbe n'existe pas dans l'intervalle des deux points x'' ni en dehors de l'intervalle des deux points x'. Elle est composée de deux courbes ovales égales, symétriquement placées par rapport au centre.

Pour $D=m$, x'' devient 0, les deux courbes ovales viennent se réunir en passant toutes deux par l'origine, qui continue d'être un centre. Je ne m'étendrai pas plus long-temps sur cette courbe, qui est assez connue.

Second cas.

$d=0$. Les deux cercles se réduisent à un seul, et la question devient celle-ci :

Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à un cercle une tangente d'une longueur donnée m.

L'inspection seule de la figure (*fig.* 18) montre que si $\overline{mR}$ est constant, om doit l'être aussi, et que, par conséquent,

le lieu cherché est une circonférence de cercle ayant o pour centre et $\sqrt{R^2+m^2}$ pour rayon.

L'équation trouvée ci-dessus devient, sous l'hypothèse $d=0$,

$$x^2+y^2=R^2\pm m^2.$$

En prenant le signe $+$, on a précisément le cercle qu'indique la géométrie.

Le signe $-$, qui indiquerait des points situés en dedans du cercle primitif si R est $> m$, un seul point si $R=m$, un lieu imaginaire si R est $< m$, doit évidemment être rejeté (*).

Après cette rapide discussion de deux cas singuliers, rentrons maintenant dans la véritable question, et examinons-la sous trois hypothèses différentes.

Troisième cas (fig. 19).

Les deux cercles se coupent. L'axe des y est la droite qui joint les deux points communs H et H' (*fig.* 19) ; $R^2-\frac{1}{4}d^2$ est >0, et représente le carré de l'ordonnée CH que, pour abréger, nous désignerons par h. L'équation est donc

$$y^2=h^2-x^2\pm\sqrt{d^2x^2+m^4}. \qquad (1)$$

Prenons d'abord le radical avec le signe $+$.

Pour que y soit réel, il faut que $\sqrt{d^2x^2+m^4}$ soit $>x^2-h^2$, ou $d^2x^2+m^4>x^4-2h^2x^2+h^4$.

Les limites entre lesquelles il faut prendre x^2 sont fournies par l'équation

$$x^4-(2h^2+d^2)x^2+h^4-m^4=0,$$

et sera par conséquent :

(*) Ce cas est susceptible d'une interprétation géométrique. Tm.

$$x_{\prime}^2 = h^2 + \frac{d^2}{2} + \sqrt{m^4 + d^2h^2 + \frac{d^4}{4}},$$

$$x_{\prime\prime}^2 = h^2 + \frac{d^2}{2} - \sqrt{m^4 + d^2h^2 + \frac{d^4}{4}}.$$

Suivant qu'on a $m^2 < h^2$, $m^2 = h^2$, $m^2 > h^2$, le radical est $<$ que la quantité qui le précède, égal à cette quantité, plus grand que cette quantité.

Fig. 20. 1° Soit $m^2 < h^2$. Alors les deux limites conviennent : la courbe rencontre l'axe des x en quatre points correspondants aux abscisses $x_{\prime}$ et $x_{\prime\prime}$. Donc, en prenant, pour représenter les valeurs $x_{\prime}$ les deux distances OQ′ et OQ″, pour représenter les valeurs $x_{\prime\prime}$ les distances OP′ et OP″ (*fig.* 20), la courbe est composée de deux parties égales, fermées, symétriquement placées par rapport au centre, et comprises, l'une entre les parallèles à l'axe des y menées par les points $P_{\prime}$ et $Q_{\prime}$, l'autre entre les parallèles au même axe menées par les points $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$. Dans chacune d'elles on découvrira facilement les points pour lesquels l'ordonnée est maximum en valeurs absolues, et qui correspondent au milieu des intervalles P′Q′ et $P_{\prime\prime}Q_{\prime\prime}$. Ce sont deux courbes ovales pareilles à celles de la courbe de Cassini quand D est $> m$; elles sont tangentes aux parallèles à l'axe des y aux points où elles rencontrent l'axe des x.

2° Quand m^2 devient égal à h^2, il semble qu'il doive arriver ici, comme pour la courbe de Cassini, que les deux lignes ovales viennent se réunir en passant par le centre. C'est ce que semble en effet indiquer l'algèbre, en donnant $x_{\prime\prime}^2 = 0$ avec $x_{\prime}^2 = 2h^2 + d^2$, pour abscisses des points de rencontre avec l'axe des x. Cependant la figure montre que ni ce point ni aucun des points voisins ne sauraient convenir à la question. Nous allons voir qu'en effet la courbe ne passe nullement à l'origine, qui est tout simplement un point isolé, et,

de plus, que, si l'on décrit une ellipse ayant pour centre C, pour grand axe $2\sqrt{2h^2+d^2}$, et pour petit axe $2\sqrt{2h^2}$, ces axes étant d'ailleurs comptés sur les lignes CX et CY, la courbe actuelle est *le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de cette ellipse sur toutes ses tangentes*. Démontrons d'abord cette dernière partie.

Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; $A^2y_1y+B^2x_1x=A^2B^2$ est l'équation d'une tangente, et $y=\frac{A^2y_1}{B^2x_1}x$ celle de la perpendiculaire menée du centre sur cette tangente.

De ces deux dernières équations on tire :

$$x_1=\frac{A^2x}{x^2+y^2},\qquad y_1=\frac{B^2y}{x^2+y^2};$$

et, portant ces valeurs dans $A^2y_1^2+B^2x_1^2=A^2B^2$, équation de condition pour que le point (x_1y_1) appartienne à l'ellipse, on obtient facilement pour équation du lieu des projections du centre sur les tangentes :

$$A^2x^2+B^2y^2=(x^2+y^2)^2. \qquad (2)$$

Or, en faisant $m^2=h^2$ dans l'équation du lieu que nous discutons ici, isolant le radical et élevant au carré, on a l'équation

$$(2h^2+d^2)x^2+2h^2y^2=(x^2+y^2)^2. \qquad (3)$$

Pour la rendre identique avec l'équation (2), il suffit de faire, comme nous l'avons déjà dit, $B=h\sqrt{2}$, $A=\sqrt{2h^2+d^2}$, valeurs très-faciles à construire géométriquement. L'ellipse est donc parfaitement déterminée. Si l'on veut exprimer les axes en fonction de rayon, on n'a qu'à remplacer h par $\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}$. On obtient ainsi :

$$A^2=2R^2+\frac{d^2}{2},\qquad B^2=2R^2-\frac{d^2}{2}.$$

On en tire $A^2 + B^2 = 2R^2$, $A^2 - B^2 = d^2$. D'après ces dernières formules, on voit que la distance des centres des deux cercles est égale à la demi-excentricité de l'ellipse, et qu'il sera très-facile de décrire les deux cercles quand l'ellipse sera donnée, de même qu'il l'a été de décrire l'ellipse d'après les deux cercles.

Voyons maintenant la forme de ce lieu qui jouit d'une double propriété si remarquable (*fig.* 21).

Son équation est $y^2 = h^2 - x^2 + \sqrt{d^2x^2 + h^4}$. Nous savons déjà qu'elle est limitée et comprise entre deux parallèles à l'axe des y menées aux distances $x' = \pm\sqrt{2h^2 + d^2} = \pm A$.

Si nous faisons $x = 0$, il vient $y = \pm h\sqrt{2} = \pm B$.

On retrouve ainsi pour points de rencontre avec les axes les quatre sommets $A_{,}$, $A_{,,}$, $B_{,}$, $B_{,,}$ (*fig.* 5) de l'ellipse, qui sont quatre points situés hors de la courbe.

Quand x augmente, on ne voit pas bien d'abord ce que devient y. Pour avoir des renseignements plus précis, cherchons l'équation de la tangente ; et, pour cela, prenons l'équation (3), qui peut se mettre sous la forme

$$F(x, y) = y^4 + 2(x^2 - h^2)y^2 + x^4 - (2h^2 + d^2)x^2. \quad (4)$$

De là l'on tire le coefficient angulaire de la tangente

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{F'(x)}{F'(y)} = -\frac{4x^3 + (4y^2 - 4h^2 - 2d^2)x}{4y^3 + 4(x^2 - h^2)y}.$$

On voit d'abord que, pour $y = 0$, $\text{tang}\,\alpha = \infty$, c'est-à-dire qu'aux points $A_{,}$ et $A_{,,}$ la courbe est tangente aux parallèles à l'axe des y, et il est facile de s'assurer que cela n'arrivera en aucun autre point.

Cherchons maintenant les points où la tangente est parallèle à l'axe des x. Pour ces points on a :

$$2x^3 + (2y^2 - 2h^2 - d^2)x = 0.$$

Cela donne d'abord $x=0$, ce qui détermine les points $B_{,}$ et $B_{,,}$; puis $x^2=h^2+\frac{d^2}{2}-y^2$, ce qui indique deux autres points correspondant à des abscisses égales de part et d'autre du centre, et à des ordonnées qui restent à déterminer. Or, en portant cette valeur de x^2 dans l'équation $F(x,y)=0$ (4), on trouve à accoupler pour les points où la tangente est parallèle à l'axe des x :

$$y^2=\frac{(2h^2+d^2)^2}{4d^2}, \qquad x^2=\frac{(d^2+2h^2)(d^2-2h^2)}{4d^2}.$$

Or $d^2-2h^2=\frac{3d^2-4R^2}{2}$, si $4R^2<d^2$ on a la figure 21 et dans les deux autres cas, la figure 22.

3° $m^2>h^2$. Alors il n'y a évidemment que deux points de rencontre avec l'axe des x, et la courbe est tout entière comprise entre les parallèles à l'axe des y menées par ces points. En continuant la discussion, on repasse par les mêmes alternatives et on arrive définitivement à la même forme de courbe que pour $m^2=h^2$.

4° Il reste à examiner l'équation (1) en prenant $y^2=h^2-x^2-\sqrt{d^2x^2+m^4}$. Pour m^2 supérieur ou égal à h^2, y est imaginaire, il n'y a pas de lieu géométrique. Pour $m^2<h^2$, on trouvera, comme il est facile de le vérifier, un lieu illimité dont les points les plus rapprochés des cercles en sont trop éloignés pour convenir à la question géométrique; ou une ligne ovale passant par les points de rencontre des deux cercles, comprise tout entière dans l'intérieur de la figure qu'ils déterminent, et ne donnant encore, par conséquent, aucune solution géométrique. (*La fin prochainement.*)

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

PAR M. STREBOR.

Une ellipse sphérique, dont les demi-axes a et b sont liés par la relation

$$\sin a = \operatorname{tang} b,$$

considérée par rapport au centre extérieur, situé sur le prolongement de son grand axe $2a$, jouit des analogies les plus frappantes avec l'hyperbole équilatère. En appelant la sphéro-conique dont il s'agit l'hyperbole équilatère sphérique, on aura les théorèmes suivants, qui vont mettre en évidence la justesse de cette dénomination. Le complément (α) de a est évidemment analogue au demi-axe réel de l'hyperbole.

On sait que dans une hyperbole équilatère le rayon central de chaque point de la courbe est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs de ce point, tirés des foyers. Semblablement :

I. Dans l'hyperbole équilatère sphérique, si l'on mène des arcs de grands cercles des foyers contigus des branches opposées à un point quelconque pris sur la courbe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs sera égal au carré de la tangente du demi-arc, tiré du centre à ce point.

Dans une hyperbole équilatère, la distance du centre à une tangente quelconque, multipliée par la distance du centre au point de contact correspondant, donne un produit constant, le carré du demi-axe de la courbe. Semblablement :

II. Dans une hyperbole équilatère sphérique, si l'on désigne par ω l'arc mené du centre, perpendiculairement au grand cercle, tangent à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque ρ, tiré du centre, on aura

$$\sin \omega \operatorname{tang} \rho = \sin a \operatorname{tang} \alpha.$$

III. L'hyperbole équilatère sphérique est lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée et dont la différence des angles à la base est constante.

On sait qu'un système d'ellipses de Cassini, ayant les mêmes foyers, est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères, ayant le même centre que les cassinoïdes et passant par les foyers. Semblablement, en prenant pour définition de cassinoïde sphérique le lieu d'un point tel que le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs, qu'on tire de là à deux points fixes, soit constant, on a le théorème,

IV. Un système de cassinoïdes sphériques ayant les mêmes foyers sera coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères sphériques, ayant même centre que les cassinoïdes et passant par les foyers.

La courbe, lieu des points pris sur des grands cercles, menés du centre d'une hyperbole équilatère sphérique, perpendiculairement à ses tangentes, de manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes, offre les analogies les plus remarquables avec la lemniscate de Bernoulli, qu'on tire d'après une méthode pareille d'une hyperbole équilatère plane. En effet (en appelant la courbe qu'on obtient par cette construction la sphéro-lemniscate),

V. La sphéro-lemniscate coïncide avec le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée et dont le produit des sinus des demi-côtés est constant, et

égal au carré du sinus de la quatrième partie de la base.

VI. La base du triangle dont on vient de parler, est la distance entre les foyers contigus des branches opposées de l'hyperbole équilatère sphérique, de laquelle la sphéro-lemniscate est dérivée.

VII. L'arc de la sphéro-lemniscate s'exprime exactement par une fonction elliptique de première espèce, sans aucune addition.

THÉORÈME

sur les rayons vecteurs des coniques.

PAR M. LUCIEN GILLES,
élève du lycée Monge.

—

Théorème. Si par un point d'une ellipse ou d'une hyperbole on mène une tangente et une normale, si l'on joint l'un des foyers à ce point et que par le centre on mène une parallèle à cette droite, la partie de cette parallèle comprise entre la normale et la tangente sera égale à l'autre rayon vecteur de ce point.

Démonstration très-facile; moyen d'exercice.

DES COURBES

sur lesquelles un point pesant, sans vitesse initiale, emploie pour descendre jusqu'au point le plus bas un temps donné par une fonction algébrique de la hauteur.

PAR M. LOUIS AOUST,
docteur ès-sciences, professeur au lycée de Strasbourg.

—

Ce problème est susceptible d'une solution complète dans

le cas le plus général, c'est-à-dire lorsque le temps de la chute du mobile est une fonction quelconque de la hauteur. L'emploi des fonctions eulériennes ou bien des intégrales à indices fractionnaires, permet de trouver l'équation différentielle du premier ordre des courbes jouissant de la propriété énoncée, et dans laquelle les variables sont séparées. Cette équation s'intègre dans le cas où le temps est une fonction algébrique de la hauteur.

Mais, dans ce même cas, la question peut être traitée très-simplement, en s'appuyant seulement sur les principes les plus élémentaires du calcul différentiel et intégral.

I.

Soit t le temps de la chute du point pesant jusqu'au point le plus bas de la courbe; quelle que soit la courbe sur laquelle le point est assujetti à glisser, on aura :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}}. \tag{1}$$

L'axe des x est placé verticalement et dans une direction contraire à la pesanteur ; l'origine des coordonnées est placée au point le plus bas ; h représente la hauteur de la chute, g la pesanteur, ds l'élément de l'arc.

Si nous transformons l'équation (1) en posant $\frac{ds}{dx} = \varphi(x)$ et $x = hz$, nous obtiendrons :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \varphi(hz) \sqrt{h} ; \quad .$$

or t est une fonction algébrique de la hauteur. Nous poserons :

$$t = Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots + Mh^\mu.$$

A, B, ... M étant des constantes au nombre de n ; $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

μ étant des exposants quelconques positifs, négatifs, fractionnaires, nous aurons donc :

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \ldots + Mh^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \varphi(hz)\sqrt{h}. \quad (2)$$

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe cherchée, il suffit de différentier n fois successives l'équation précédente, et d'éliminer les n coefficients A, B, C, ... M entre ces $n+1$ équations (ce qui donne une équation unique sans coefficients constants), et d'égaler à 0 l'expression qui se trouve sous le signe d'intégration. Ce sera l'équation différentielle entre s et x; elle sera de l'ordre n, à coefficients fonctions de x et d'une forme qui en permettra l'intégration. Mais son intégration dépendra de la résolution d'une équation algébrique du degré n, d'une forme particulière et dont on pourra déterminer les racines; le problème sera donc résolu.

On évite les difficultés inhérentes à l'élimination des constantes A, B, ... M et à la résolution de l'équation du degré n, en procédant de la manière suivante.

Posons dans l'équation (2) $\varphi(hz).\sqrt{hz} = V$; différentions par rapport à h, et éliminons une constante A entre la proposée et sa dérivée. Si nous posons :

$$V\alpha - h\frac{dV}{dh} = V_1,$$

nous obtiendrons

$$B(\alpha-\beta)h^{\beta} + C(\alpha-\gamma)h^{\gamma} + \ldots + M(\alpha-\mu)h^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} . V_1.$$

Différentions cette dernière équation, éliminons la constante B entre cette équation et sa dérivée, et posons

$$V_1\beta - h\frac{dV_1}{dh} = V_2,$$

nous aurons :

$$C(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)h^{\gamma}+D(\alpha-\delta)(\beta-\delta)h^{\delta}$$
$$+\ldots+M(\alpha-\mu)(\beta-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}.V_2.$$

En continuant toujours de la même manière, on tombera sur une équation débarrassée de toute constante, cette équation est

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}V_n=0, \tag{3}$$

dans laquelle on a posé

$$V_n=V_{n-1}.\mu-h\frac{dV_{n-1}}{dh};$$

or, pour que l'équation (3) soit satisfaite, il faut que V_n soit nul ; on a donc l'équation différentielle

$$V_{n-1}.\mu-h\frac{dV_{n-1}}{dh}=0.$$

Si l'on remarque que l'on a posé $x=hz$, et que par conséquent $\frac{dV_{n-1}}{dh}=\frac{dV_{n-1}}{dx}.\frac{dx}{dh}=\frac{dV_{n-1}}{dx}z$, on aura l'équation différentielle de la courbe

$$x\frac{dV_{n-1}}{dx}-\mu V_{n-1}=0. \tag{4}$$

II.

L'équation différentielle (4) que nous venons de trouver est de l'ordre n; nous allons nous occuper de l'intégration de cette équation.

Cette équation étant linéaire, on trouvera pour son intégrale

$$V_{n-1}=M_1x^{\mu},$$

M_1 étant une constante arbitraire.

La fonction V_{n-1} étant déterminée, il est facile de déterminer V_{n-2}; en effet, on a la relation

$$\frac{dV_{n-2}}{dh}h - \lambda V_{n-2} = V_{n-1},$$

ou bien

$$x\frac{dV_{n-2}}{dx} - \lambda V_{n-2} = M_1 x^{\mu};$$

l'intégrale de cette équation est

$$V_{n-2} = L_1 x^{\lambda} + M_1 x^{\mu},$$

L_1 étant une constante introduite par l'intégration.

En continuant de la même manière, on trouverait

$$V_{n-3} = I_1 x^{\iota} + L_1 x^{\lambda} + M_1 x^{\mu},$$

I_1 étant la constante arbitraire; donc finalement on trouvera:

$$V = A_1 x^{\alpha} + B_1 x^{\beta} + \ldots + M_1 x^{\mu},$$

A_1, B_1, ... étant des quantités constantes introduites par l'intégration des équations différentielles successives.

Si l'on remplace V par sa valeur $\sqrt{hz}.\varphi(hz)$ ou bien par $\sqrt{x}\varphi(x)$, on trouve

$$\varphi(x) = \frac{ds}{dx} = A_1 x^{\alpha-\frac{1}{2}} + B_1 x^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x^{\gamma-\frac{1}{2}} + \ldots + M_1 x^{\mu-\frac{1}{2}};$$

de là

$$s = \frac{A_1}{\alpha+\frac{1}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{B_1}{\beta+\frac{1}{2}} x^{\beta+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{M_1}{\mu\frac{1}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}} + K, \quad (5)$$

qui est l'équation de la courbe en termes finis entre l'arc et l'abscisse.

III.

Occupons-nous maintenant de la détermination des constantes arbitraires.

L'équation (1), dans laquelle on remplace t et ds par leurs valeurs, devient

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\ldots+Mh^{\mu}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\left[\frac{A_1x^{\alpha-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}+\frac{B_1x^{\beta-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-1}}+\ldots+\frac{M_1x^{\mu-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}\right];$$

or il est facile de voir que

$$\int_0^h\frac{A_1x^{\alpha-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-1}}=K.A_1h^{\alpha},$$
$$\int_0^h\frac{B_1x^{\beta-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}=K_1B_1h^{\beta},$$

et ainsi de suite; K. K_1 ... étant des quantités connues, on aura donc identiquement :

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\ldots+Mh^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2g}}[KA_1h^{\alpha}+K_1B_1h^{\beta}+.—.+K_1M_1h^{\mu}],$$

et par suite

$$A_1=\frac{\sqrt{2g}}{K}.A;\quad B_1=\frac{\sqrt{2g}}{K_1}B\ldots\quad M_1=\frac{\sqrt{2g}}{K_{\mu}}M;$$

ainsi les constantes arbitraires A_1, B_1 ... M_1 seront tout à fait déterminées.

Il sera donc facile de calculer ces constantes dans chaque cas particulier.

IV.

Si tous les exposants $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ \mu$ étaient entiers et positifs, on arriverait encore plus simplement à l'équation différentielle cherchée. Soit μ le plus grand exposant, il suffira de différentier μ fois successives l'équation (2) par rapport à h, et l'on trouvera :

$$\frac{d^\mu t}{dh}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{z^{\mu-\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{1-z}}.\frac{d^\mu.[\varphi(x).\sqrt{x}]}{dx^\mu}=0;$$

or, pour que cette équation soit satisfaite, il suffit que l'on ait

$$d^\mu.\frac{\sqrt{x}.\varphi(x)}{dx^\mu}=0;$$

de là on trouve par l'intégration, les constantes étant convenablement déterminées :

$$\varphi(x)=\frac{ds}{dx}=A_{,}x^{\alpha-\frac{1}{2}}+B_{,}x^{\beta-\frac{1}{2}}+\ldots+M'x^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

V.

Comme vérification de la formule (5), cherchons la courbe tautochrone, c'est-à-dire la courbe sur laquelle un point pesant glissant emploie, pour arriver au point le plus bas, un temps indépendant de la hauteur de la chute ; alors il suffit de supposer dans l'expression du temps tous les coefficients nuls, excepté le cofficient A, et la puissance α de h, dans ce terme, égale à 0. La formule (5), dans laquelle on introduirait ces hypothèses, donnerait :

$$s=2A_{,}x^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est l'équation de la cycloïde.

Si l'on cherchait la courbe telle que le temps de la chute fût proportielle à la hauteur, on trouverait :

$$s^2=\frac{4}{9}B_{,}x^3.$$

Note. Voir un mémoire de M. Puiseux sur les tautochrones. (Journal de mathématiques, t. IX, p. 409, 1844.)

Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 178 (p. 75).

PAR M. B. JAUFROID,
maître d'études au lycée de Dijon, admissible à l'École normale supérieure.

—

(*Fig.* 25.) Je prends pour axes des coordonnées, les axes principaux de l'ellipse : on aura

$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ pour l'ellipse;

(1) $y^2+x^2=a^2$ pour le cercle décrit sur le grand axe;

(2) $y=\alpha(x-c)$ pour une corde quelconque MN passant par le foyer F.

(3) $y=-\frac{1}{\alpha}(x-c)$ pour la corde PQ perpendiculaire à la première.

(*Fig.* 25.) Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des points d'intersection de MN avec le cercle.

$$(x'-x'')^2=4\frac{a^2+b^2\alpha}{(1+\alpha^2)^2};\quad (y'-y'')^2=4\frac{\alpha^2(a^2+b^2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2},$$

$$\overline{MN}^2=4\frac{a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}=d^2.$$

En changeant dans cette expression α en $-\frac{1}{\alpha}$, et par conséquent α^2 en $\frac{1}{\alpha^2}$, on trouve :

$$\overline{PQ}^2=4\frac{b^2+a^2\alpha^2}{1+\alpha^2},\ \text{d'où}\ d^2+d'^2=4(d^2+b^2);$$

donc les cordes MN, PQ sont égales à deux diamètres conjugués dans l'ellipse.

Soit $y=mx$ l'équation du diamètre égal à d, et x'_1, y'_1,

x_1'', y_1'' les coordonnées des extrémités de ce diamètre, on a :

$$d^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2.$$

On trouve :

$$(x_1'-x_1'')^2=4\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2};\ (y_1'-y_1'')^2=4\frac{a^2b^2m^2}{a^2m^2+b^2};$$

$$d^2=4\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}.$$

En changeant m en m', on a pour d'^2 :

$$d'^2=4\frac{a^2b^2(1+m'^2)}{a^2m'^2+b^2}.$$

Les deux équations en m et m' sont donc

$$\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}=\frac{a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}\ \text{et}\ \frac{a^2b^2(1+m'^2)}{a^2m'^2+b^2}=\frac{b^2+a^2\alpha^2}{1+\alpha^2};$$

en les résolvant et prenant m et m' de signes contraires, on a :

$$m=\pm\frac{b\alpha}{a};\ m'=\mp\frac{b}{a\alpha},$$

et l'on a bien

$$mm'=-\frac{b}{a}.$$

Soit maintenant $y=\alpha x$ un diamètre parallèle à la corde $y=\alpha(x-c)$, les coordonnées du point d'intersection de ce diamètre avec la corde $y=-\frac{1}{\alpha}(x-c)$ sont :

$$x=\frac{c}{1+\alpha^2};\ y=\frac{\alpha c}{1+\alpha^2};$$

la distance de ce point d'intersection au centre est donc

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{c^2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

par conséquent, les segments de ce diamètre sont :

$$a-\frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad (4)$$

$$a+\frac{c}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}+c}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \qquad (5)$$

Cherchons maintenant les rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités du diamètre conjugué $y=mx$ ou $\frac{b\alpha}{a}x$, en prenant le signe $+$ pour m. Les coordonnées des points d'intersection de ce diamètre avec l'ellipse sont :

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}};\ y=\pm\frac{b\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

la distance du foyer F à chacun de ces points est

$$\sqrt{\left(c-\frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2+\frac{b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2(1+\alpha^2)-2ac\sqrt{1+\alpha^2}+a^2+b^2\alpha^2}{1+\alpha^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2+a^2(1+\alpha^2)-2ac\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\alpha^2}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

expression égale à (4). Faisant le même calcul pour le deuxième rayon, on trouve :

$$\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

expression égale à (5).

Si on prend le diamètre $y=-\frac{1}{\alpha}x$ parallèle à la corde $y=-\frac{1}{\alpha}(x-c)$, on trouve pour les segments de ce dia-

mètre, déterminés par la corde $y = \alpha(x-c)$, et pour les rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités du diamètre conjugué $y = -\frac{b}{a\alpha}x$, les expressions communes

$$\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}-c\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \text{ et } \frac{a\sqrt{1+\alpha^2}+c\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

La deuxième partie du théorème se trouve ainsi démontrée. Dans l'hyperbole, la somme des carrés des cordes MN et PQ est constante.

SUR LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ANALYTIQUE.

PAR M. BORGNET,
professeur de mathématiques au lycée de Tours (*).

—

Les *Nouvelles Annales* mentionnent (page 475, 1847) la présentation que j'ai faite à l'Académie des sciences d'un essai de géométrie sphérique, à la date du 15 novembre 1847, et annonçant que mon mémoire a été renvoyé à l'examen d'une commission composée de MM. Cauchy, Poncelet et Liouville.

J'attendais le rapport des commissaires, lorsque votre numéro de février, que je viens de recevoir, m'a fait connaître les recherches de M. Vannson sur le même sujet. Le système de coordonnées employé par M. Vannson est celui que j'ai moi-même employé dans mon mémoire. Cette coïncidence me détermine à vous adresser quelques détails sur

(1) Je rappelle derechef que l'Allemagne possède depuis 1835 un traité *ex professo* sur la sphéro-géométrie analytique dans le système des coordonnées sphériques. L'auteur, M. Gudermann, annonçait même une traduction française. Je ne sache pas qu'elle ait paru. Tm.

les époques auxquelles j'ai donné connaissance de mon travail, et sur les matières qui y sont traitées.

Le 12 juin 1847, j'ai déposé ce travail dans les archives de la Société d'agriculture, sciences, etc., du département d'Indre-et-Loire, afin d'assurer mes droits à la priorité dans des recherches qui me paraissaient intéressantes et que je croyais neuves.

Pendant la session du congrès scientifique qui s'est ouvert à Tours le 15 septembre 1847, j'ai eu occasion d'exposer les principes dont je faisais usage dans la résolution des problèmes de géométrie sphérique.

Enfin, mon essai de géométrie analytique de la sphère a été présenté à l'Académie des sciences dans la séance du 15 novembre 1847.

Voici maintenant l'analyse de cet essai.

§ 1. *Préliminaires.*

Dans un court résumé, je donne l'historique de la géométrie de la sphère. Je fais remarquer l'absence d'uniformité dans la marche suivie jusqu'ici pour traiter les questions relatives à cette partie de la science de l'étendue. Le système des coordonnées de Descartes réunit bien ces caractères d'uniformité, mais il ne permet d'étudier les courbes sphériques que par leurs projections. Les projections étant, dans le système de Descartes, des intermédiaires obligés entre la courbe étudiée et l'esprit qui l'étudie, présentent souvent des obstacles à l'investigation.

Cet inconvénient disparaît quand on rapporte les points de la sphère à deux grands cercles : l'une des coordonnées est la longitude du point ; l'autre coordonnée est, non pas sa latitude, mais une distance qui, comptée sur le premier méridien, se trouve dans les mêmes conditions que la longitude comptée sur l'équateur.

Ce choix de coordonnées permet de partager les lignes sphériques en deux classes; les lignes dont les équations ne renferment que les tangentes trigonométriques des coordonnées, ce sont les lignes algébriques. Toutes les autres lignes sont appelées transcendantes.

Les lignes algébriques sont distribuées en lignes de différents ordres, suivant le degré de leur équation.

Les lignes transcendantes ne sont soumises à aucune classification.

Toute équation algébrique du premier degré représente un grand cercle, c'est-à-dire l'intersection de la sphère par un plan conduit par le centre.

Toute équation algébrique du deuxième degré représente une conique sphérique, c'est-à-dire l'intersection de la sphère par un cône du second degré dont le sommet est au centre.

En général, toute ligne algébrique de l'ordre *n* résulte de l'intersection de la sphère par un cône ayant son sommet au centre, et dont l'équation, en coordonnées rectilignes, est du degré *n*.

Cette première partie se termine par des formules pour le changement de coordonnées.

§ 2. *Examen particulier des lignes du premier ordre.*

Équation du grand cercle assujetti à deux conditions, comme de passer par deux points de la sphère, d'avoir pour pôle un point déterminé de cette surface, de passer par un point et de couper un autre grand cercle sous un angle donné, etc., etc.

Angle de deux grands cercles donnés par leurs équations.

§ 3. *Du petit cercle.*

C'est une ligne du deuxième ordre; son équation au moyen de son pôle et de son rayon polaire; angle de deux petits cercles donnés par leurs équations; axe radical de

deux petits cercles ; centre de similitude ; centre radical de trois petits cercles ; usage des propriétés des centres radicaux et des centres de similitude, pour déterminer un cercle par trois conditions.

En terminant cette troisième partie, j'ai occasion de remarquer cette belle propriété de géométrie sphérique : si d'un point de la sphère, extérieure à un petit cercle, on mène deux arcs sécants à ce petit cercle, les tangentes trigonométriques de la moitié de ces sécantes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes de la moitié de leurs parties extérieures. Propriété analogue pour le cas où le point est intérieur au petit cercle. (*La fin prochainement.*)

SUR LES CONES DU SECOND DEGRÉ

et sur les ellipses sphériques.

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la Faculté de Bordeaux.

—

(1) *Problème.* Trouver le lieu des droites OM telles que la somme des angles COM, C'OM soit constante, OC et OC' étant deux droites fixes.

Soit COC' $=2c$; prenons la bissectrice Om pour axe des z, l'axe des x étant perpendiculaire à Om et dans le plan COC', enfin l'axe des y perpendiculaire en O au plan de zx. En supposant COM $=$ A, C'OM $=$ B, l'équation sera $A+B=2a$, $2a$ étant un angle constant plus grand que $2c$. Comme l'on a :

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 2a\,;$$

$$(\cos A\cos B-\cos 2a)^2=\sin^2 A\sin^2 B=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B),$$

on en déduira l'équation

$$\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos 2a\cos A\cos B=\sin^2 2a$$

Mais

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a\,; \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a\,;$$

de là

$$(\cos A - \cos B)^2 + 4\sin^2 a \cos A \cos B = 4\sin^2 a \cos^2 a.$$

De plus, OM fait avec les trois axes des angles ayant pour cosinus

$$x : \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad y : \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad z : \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

De même, OC fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\sin c$, 0, $\cos c$; enfin OC' fait avec les axes des angles ayant pour cosinus $-\sin c$, 0, $\cos c$. On aura donc :

$$\cos A = (z\cos c + x\sin c) : \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos B = (z\cos c - x\sin c) : \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

d'où

$$\cos A - \cos B = 2x\sin c : \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et par suite l'équation

$$x^2\sin^2 c + \sin^2 a(z^2\cos^2 c - x^2\sin^2 c) = \sin^2 a\cos^2 a(x^2+y^2+z^2),$$

ou bien encore

$$\cos^2 a\,(\sin^2 a - \sin^2 c)\,x^2 + \sin^2 a.\cos^2 a y^2 + \\ + \sin^2 a(\cos^2 a - \cos^2 c)z^2 = 0.$$

$$\cos^2 a - \cos^2 c = -(\sin^2 a - \sin^2 c)\,;$$

d'ailleurs on a :

$$\cos^2 a = \cos b \cos c,$$

l'angle b étant celui que la droite OM fait avec Oz quand elle est dans le plan zOy; on aura donc :

$$\cot^2 a.x^2 + \cot^2 b y^2 - z^2 = 0, \qquad (1)$$

ce qui est l'équation d'un cône du second degré; on sait, réciproquement que tout cône du deuxième degré peut être représenté par une équation telle que (1). Donc tout cône a

deux lignes focales qui font avec une même génératrice des angles dont la somme est constante.

(2) Il est à remarquer qu'on parviendrait à la même équation en partant de l'équation $A-B=2a$. Voici pourquoi. Imaginons une sphère ayant son centre au sommet du cône; la courbe d'intersection sera une ellipse sphérique, et si les lignes focales percent la sphère en C, C′ dans l'intérieur d'une même nappe et en C_1, C_1' dans l'intérieur de la nappe opposée; si de plus M est un point quelconque de l'ellipse, on aura $CM+C_1M=\pi$, $C'M+C_1'M=\pi$. Soit de plus $CM+C'M=2a$, il en résultera $C_1M+C_1'M=2\pi-2a$. Donc C_1 et C_1' sont également des foyers de l'ellipse. On a aussi $C_1M-C'M=\pi-2a$, $C_1'M-CM=\pi-2a$; donc C_1 et C′, ou bien C_1' et C, peuvent être considérés comme foyers d'une hyperbole sphérique (la différence des arcs étant constante) qui ne diffère en rien de l'ellipse sphérique, si ce n'est par la position des foyers.

(3) Si l'on prend $x^2+y^2+z^2=r^2$ pour équation de la sphère, l'élimination de z donnera:

$$\left(\frac{x}{\sin a}\right)^2+\left(\frac{y}{\sin b}\right)^2=r^2. \qquad (2)$$

Telle est l'équation de la projection de l'ellipse sphérique en coordonnées rectilignes sur le plan xy.

Parmi les divers moyens pour déterminer un point sur la surface sphérique, un des plus simples est de prendre deux grands cercles perpendiculaires entre eux, mX et mY; du point M de la surface on mène sur ces cercles les arcs perpendiculaires MP, MQ qui rencontrent mX en P; soit $mP=rx_1$ et MQ, qui rencontre mY en Q; soit $mQ=ry_1$. D'ailleurs on voit de suite qu'on a $\tang x_1=\frac{x}{z}$, $\tang y_1=\frac{y}{z}$, d'où, au moyen de $\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+1=\left(\frac{r}{z}\right)^2$,

$$\frac{z}{r}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 x_1+\operatorname{tang}^2 y_1+1}},\quad \frac{y}{r}=\frac{\operatorname{tang} y_1}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 x_1+\operatorname{tang}^2 y_1+1}},$$

$$\frac{x}{r}=\frac{\operatorname{tang} x_1}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 x_1+\operatorname{tang}^2 y_1+1}};$$

l'équation (2) devient donc :

$$\left(\frac{\operatorname{tang} x_1}{\operatorname{tang} a}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{tang} y_1}{\operatorname{tang} b}\right)^2=1. \qquad (3)$$

Telle est l'équation en coordonnées sphérique, indiquée à la page 54 de ce volume.

(4) *Cône supplémentaire.* Si par le sommet d'un cône de second degré on mène des perpendiculaires aux plans tangents, on a un nouveau cône du second degré, et si l'équation du premier est $\cot^2 a x^2+\cot^2 b y^2-z^2=0$, celle du second est $\operatorname{tang}^2 a x^2+\operatorname{tang}^2 b y^2-z^2=0$, d'où l'on concluera que le premier cône est supplémentaire du second.

Coupons le cône $\cot^2 a x^2+\cot^2 b x^2-z^2=0$ par le plan $z=px+qy$, il viendra

$$(\cot^2 a-p^2)x^2-2pqxy+(\cot^2 b-q^2)y^2=0;$$

le plan sera tangent si l'équation précédente ne représente qu'une droite, ou si son premier membre est un carré; il faut pour cela avoir $\cot^2 a.\cot^2 b-p^2\cot^2 b-q^2\cot^2 a=0$. La perpendiculaire au plan a pour équations $x+pz=0$, $y+qz=0$, l'élimination de p et q donne donc :

$$z^2\cot^2 a\cot^2 b-x^2\cot^2 b-y^2\cot^2 a=0,$$

ou $$x^2\operatorname{tang}^2 a+y^2\operatorname{tang}^2 b-z^2=0.$$

Le cône supplémentaire détermine sur la sphère l'ellipse supplémentaire; on voit donc qu'étant donnée l'ellipse sphérique d'équation (3), l'ellipse supplémentaire a pour équation $\left(\frac{\operatorname{tang} x_1}{\cot a}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{tang} y_1}{\cot b}\right)^2=1$. (4) D'après la construction du cône supplémentaire, on voit que l'ellipse sup

plémentaire est le lieu des pôles des arcs de grands cercles tangents à l'ellipse primitive. (V. *Annales*, p. 56.)

(5) Si l'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'axe des y, de sorte que l'axe des x' vienne s'appliquer sur une ligne focale, en posant $x=x'\sin c'-z'\cos c$, $z=x'\cos c+z'\sin c$, l'équation du cône $\cot^2 a x^2+\cot^2 b y^2-z^2=0$ deviendra :

$$y^2+z'^2=\left(x.\frac{\tan^2 b}{\tan a}+z\frac{\sin c}{\sin a\cos b}\right)^2=\left(\frac{z\sin c+x\cos c\sin^2 b}{\sin a\cos b}\right)^2;$$

d'où ce théorème : « Les plans perpendiculaires aux lignes » focales d'un cône le coupent suivant des ellipses dont un » foyer est sur la ligne focale. »

De même, si l'on fait tourner les trois axes autour de l'axe des x de manière que l'axe des y vienne s'appliquer sur une ligne focale du cône supplémentaire, en posant :

$$y=y'\sin c_1-z'\cos c_1 \quad z=y'\cos c_1+z'\sin c_1$$

et

$$\cos^2 c_1=\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a},$$

l'équation du cône $\cot^2 a x^2+\cos^2 b y^2-z^2=0$ deviendra :

$$x^2+\left(z'-\frac{\tan c_1}{\cos^2 a}\right)^2=\left(\frac{y'\cot b}{\cot^2 a}\right)^2.$$

De là ce théorème : « Un cône est coupé suivant des cercles » par les plans perpendiculaires aux lignes focales du cône » supplémentaire. Autrement : Si deux cônes sont supplé» mentaires, les sections circulaires de l'un sont perpendicu» laires aux lignes focales de l'autre.

Il est à remarquer que les lignes focales du cône supplémentaire $\tan^2 a x^2+\tan^2 b y^2-z^2=0$ sont dans le plan zOy et font avec l'axe des z un angle c_1 donné par l'équation

$$\cos^2 c_1=\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}.$$

D'ailleurs, si l'on représente par I l'inclinaison des secteurs circulaires du cône $\cot^2 a x^2 + \cot^2 b y^2 - z^2 = 0$ sur le plan zOx, on a $\cos^2 c_1 = \sin^2 I = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 a} = \sin^2 B$, en représentant par B l'angle opposé au côté b dans le triangle sphérique rectangle dont les côtés sont a, b, c. « Ainsi l'angle des deux sections » circulaires symétriques par rapport au plan de ses lignes fo- » cales, est égal à l'angle formé par les plans qui passent par » une ligne focale et les génératrices opposées de la section » principale minimum. » De là cette construction : Divisez en deux parties égales l'angle d'une ligne focale et d'une droite AA′, les points A, A′, étant sur les lignes focales et à égales distances du sommet, ou sur une parallèle à l'axe des x. Le plan mené par la bissectrice perpendiculairement à celui des lignes focales ira couper en B et B′ les deux génératrices qui forment la section principale minimum et les plans AA′B, AA′B′ seront deux sections circulaires symétriques par rapport au plan des lignes focales.

C'est dans les mémoires de M. Chasles, et notamment dans le mémoire de géométrie pure sur les propriétés des cônes du second degré, que l'on trouvera de nombreuses conséquences des propositions précédentes.

Problème. Discuter la courbe, intersection d'une sphère et d'une ellipsoïde de révolution autour de la ligne de ses foyers supposés sur la sphère. C'est une sorte d'ellipse sphérique décrite par un fil attaché en deux points de la surface, mais intérieurs à la sphère. Quand le fil est extérieur, on a l'ellipse sphérique dont il a été question plus haut.

EXERCICES

sur les équations irrationnelles rendues rationnelles,

d'après M. FORSTEMANN, à Dantzig. (Crelle, XIV, 236, 1835.)

—

1. $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$; $A-B=0$.

2. $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}=0$; $A^2+B^2+C^2-2(AB+AC+BC)=0$.

3. $\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}=0$;
$3x^2-2\Sigma x_1.x+\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1x_2=0$;

Σ désigne des fonctions symétriques.

4. $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$;
$\Sigma A^4-4\Sigma A^3B+6\Sigma A^2B^2+4\Sigma A^2BC-40ABCD=0$.

5. $\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}+\sqrt{x+x_4}=0$;
$Mx-N=0$; $M=8\Sigma x_1^3-\Sigma x_1x_2^2+2\Sigma x_1x_2x_3$;
$N=\Sigma x_1^4-4\Sigma x_1^3x_2+6\Sigma x_1^2x_2^2+4\Sigma x_1^2x_2x_3-40x_1x_2x_3x_4$;
$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=5$; $x=\frac{N}{M}=-\frac{71}{120}$;
$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x=\infty$.

6. Question : A quel degré monte l'équation rendue rationnelle suivante ?
$\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}+\ldots\sqrt{x+x_n}=0$.

7. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$; $\Sigma A^3+3\Sigma A^2B-21ABC=0$.

8. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}-\sqrt[3]{3x+3}=0$; $x=8$;
$x=-\frac{1}{40}(31\pm\sqrt{-1539})$.

9. $\sqrt[3]{x+x_1}+\sqrt[3]{x+x_2}+\sqrt[3]{x+x_3}=0$; $Mx+N=0$.
$M=9[\Sigma x_1^2-\Sigma x_1x_2]$; $N=\Sigma(x_1)^3-27x_1x_2x_3$.

10. $\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}=0$;

$$\Sigma A^4 - 4\Sigma A^3B + 6\Sigma A^2B^2 - 124\Sigma A^2BC = 0.$$

11. $\sqrt[4]{x+x_1}+\sqrt[4]{x+x_2}+\sqrt[4]{x+x_3}=0$;

$Mx^4+Nx^3+Px^2+Qx+R=0$; $M=375$; $N=500\Sigma x_1$;

$P-130\Sigma x_1^2+620\Sigma x_1x_2$; $Q-4\Sigma x_1^3+124\Sigma x_1^2x_2+498x_1x_2x_3$;

$R=-\Sigma x_1^4+4\Sigma x_1^3x_2-6\Sigma x_1^2x_2^2+124\Sigma x_1^2x_2x_3$;

$x_1=80$; $x_2=15$; $x_3=0$;

$3x^4+380x^3+12842x^2+129580x-142805=0$; $x=1$;

$x=-80,000524$; $x=-23,8307\pm 5,19631\sqrt{-1}$.

12. $$\frac{1}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}=\frac{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{A+B}.$$

QUESTIONS.

180. Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs de paraboles ayant le même foyer, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera un ovale de Descartes. (Strebor.)

181. Démontrer la formule suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1-\sin^2 a\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\log(\cos a)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a\sin^2\varphi}}.$$

(W. Roberts.)

182. Soit E la longueur du quadrant d'une ellipse dont on désigne l'excentricité par e; le demi-grand axe étant égal à l'unité, il faut prouver que

$$\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{E}e\,de}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}}=\frac{\pi\chi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

(W. Roberts.)

183. t_n travailleurs, dont la force individuelle est représentée par f_n, exécutent m_n mètres d'ouvrages en i_n jours dans un terrain dont la dureté est représentée par d_n; l'indice n prend les n valeurs 1, 2, 3... n; combien de jours mettront tous ces travailleurs, au nombre de $t_1+t_2+\ldots t_n$, travaillant ensemble, à exécuter M mètres d'ouvrages dans un terrain de dureté D?

DE L'ÉLIMINATION DE LA VARIABLE

entre deux équations algébriques.

Par C. G. J. JACOBI, professeur à Kœnigsberg. (Crelle, XV, 101, 1835, latin.)

I.

Entre les diverses méthodes d'élimination qui ont été proposées, il en est une que je me rappelle avoir lue jadis dans les ouvrages élémentaires composés par le célèbre Bezout, et qui se distingue avantageusement des autres à divers titres. Mon but est d'exposer brièvement cette méthode et d'y ajouter diverses observations (*).

Nous pouvons supposer que les deux équations sont de même ordre; car si l'une des équations est d'un ordre inférieur à l'autre, il suffira d'égaler à 0 les coefficients des puissances manquantes. Soient donc ces équations :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_0 = 0,$$
$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} \ldots + b_0 = 0.$$

(*) Les auteurs du programme d'admission à l'École polytechnique n'ont pas eu la main heureuse en choisissant parmi les méthodes d'élimination celle du p. g. c. d.; la plus mauvaise, et tellement longue, qu'on a été obligé de *proscrire* la partie essentielle, la discussion des facteurs étrangers. Ce programme aurait besoin d'être totalement remanié, car il domine et entrave l'enseignement

Retranchant la seconde équation multipliée par a_n de la première multipliée par b_n, il vient une équation de l'ordre $n-1$; retranchant la seconde équation multipliée par $a_n x + a_{n-1}$ de la première multipliée par $b_n x + b_{n-1}$, on obtient encore une seconde équation d'ordre $n-1$; la seconde équation étant multipliée par $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$ et la première par $b_n x^2 + b_{n-1} x + b_{n-2}$, on a encore après la soustraction une équation d'ordre $n-1$. En continuant ainsi, on tire des deux équations n autres équations d'ordre $n-1$, dont la dernière s'obtient en multipliant la seconde équation par

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} \ldots + a_1,$$

et la première par

$$b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \ldots + b_1,$$

et faisant la soustraction. Euler a employé, dans son *Introductio*, la première et la dernière de ces équations, et a pu déduire des deux équations données deux autres d'un ordre immédiatement inférieur; et par la même méthode, ayant déduit de ces deux-là deux autres d'un ordre inférieur, et continuant de même, il enseigne le moyen de parvenir à deux équations linéaires, d'où l'on peut tirer la valeur de la racine *commune* et aussi l'équation de condition, qui ne renferme plus la variable. Mais dès qu'on peut obtenir par le moyen indiqué n équations entre les $n-1$ quantités linéaires, x, x^2, x^3, ... x^{n-1}, on peut les éliminer; on parvient ainsi de suite à l'équation finale. Telle est la méthode de Bezout, et comme il paraît la plus expéditive de toutes, et par laquelle nous verrons que le problème de l'élimination de la variable entre deux équations du $n^{ème}$ degré est ramenée à l'élimination de $n-1$ variables, de n équations linéaires, élimination qu'on effectue par la formule générale connue. Suivons cette méthode de plus près.

II.

Posons :

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= [a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots a_1]\varphi(x) \\ &\quad -(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots b_1]f(x) \\ m_1 &= [a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots a_2]\varphi(x) \\ \vdots &\quad -[b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots b_2]\,f(x) \\ m_{n-1} &= a_n(\varphi(x)) - b_n f(x). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et soit encore, le terme constant étant multiplié par x^0

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \alpha_{0,0} x^0 + \alpha_{1,0} x^1 + \alpha_{2,0} x^2 + \dots \alpha_{n-1,0} x^{n-1} \\ m_1 &= \alpha_{0,1} x^0 + \alpha_{1,1} x^1 + \alpha_{2,1} x^2 + \dots \alpha_{n-1,1} x^{n-1} \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= \alpha_{0,n-1} x^0 + \alpha_{1,n-1} x^1 + \alpha_{2,n-1} x^2 + \dots \alpha_{n-1,n-1} x^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

L'équation finale cherchée sera le résultat de l'élimination des $n-1$ quantités x^1, x^2, x^3, $\dots x^{n-1}$ entre les n équations des $n-1^{\text{ème}}$ ordre.

$$m_0 = 0;\ m_1 = 0;\ m_2 = 0;\ \dots m_{n-1} = 0.$$

Examinons de plus près ces n équations.

D'abord *les séries horizontales des coefficients sont les mêmes que les séries verticales*, ou bien on a :

$$\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}. \quad (3)$$

En effet, l'on a :

$$\left.\begin{aligned} m_s &= [a_n x^{n-s-1} + a_{n-1} x^{n-s-2} + \dots a_{s+1}]\varphi(x) \\ &\quad -[b_n x^{n-s-1} + b_{n-1} x^{n-s-2} + \dots b_{s+1}]\,f(x) \\ &= \alpha_{0,s} x^0 + \alpha_{1,s} x^1 + \alpha_{2,s} x^2 + \dots \alpha_{n-1,s} x^{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Remplaçant $\varphi(x)$ et $f(x)$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{r,s} &= a_{s+1} b_r + a_{s+2} b_{r-1} + a_{s+3} b_{r-2} + \dots {}_{r+s+1} a b_0 \\ &\quad -[b_{s+1} a_r + b_{s+2} a_{r-1} + \dots b_{r+s+1} a_0]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Si $r+s+1 > n$, alors la partie positive s'arrête au terme

$a_n b_{r+s+1-n}$ et la partie négative à $b_n a_{r+s+1-n}$, on a de même

$$\alpha_{s,r} = a_{r+1}b_s + a_{r+2}b_{s-1} + \ldots + a_{s+r+1}b_0$$
$$- [b_{r+1}a_s + b_{r+2}a_{s-1} + \ldots + b_{r+s+1}a_0].$$

Si $s > r$, on a :

$$\alpha_{s,r} - \alpha_{r,s} = a_{r+1}b_s + a_{r+2}b_{s-1} + \ldots + a_s b_{r+1}$$
$$- [b_{r+1}a_s + b_{r+2}a_{s-1} + \ldots + b_s a_{r+1}];$$

or, le second membre s'annule de lui-même, donc

$$\alpha_{s,r} = \alpha_{r,s}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Il suit des formules (1) et (2), et de l'équation (3)

$$m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_{n-1} x^{n-1} = \Sigma \alpha_{r,s} x^r x^s =$$
$$= [n a_n x^{n-1} + n-1 . a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1] \varphi x -$$
$$- [n b_n x^{n-1} + n-1 . b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b'] f(x);$$

dans la somme Σ, on donne à r et s toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $n-1$. On peut aussi mettre cette formule sous cette forme :

$$m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_{n-1} x^{n-1} = \Sigma \alpha_{r,s} x^r x^s$$
$$= \varphi(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

III.

x^0, x^1, x^2, ... x^{n-1} étant considérées comme n inconnues, posons qu'on ait obtenu par la résolution des équations (2) :

$$\left.\begin{array}{l} Lx^0 = A_{0,0}m_0 + A_{0,1}m_1 + A_{0,2}m_2 + \ldots A_{0,n-1}m_{n-1} \\ Lx^1 = A_{1,0}m_0 + A_{1,1}m_1 + A_{1,2}m_2 + \ldots A_{1,n-1}m_{n-1} \\ Lx^2 = A_{2,0}m_0 + A_{2,1}m_1 + A_{2,2}m_2 + \ldots A_{2,n-1}m_{n-1} \\ Lx^{n-1} = A_{n-1,0}m^0 + A_{n-1,1}m_1 + A_{n-2,2}m_2 + \ldots A_{n-1,n-1}m_{n-1} \\ L = \Sigma \pm \alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n-1,n-1} \end{array}\right\} (6)$$

où Σ désigne comme à l'ordinaire le *déterminant* (*) formé d'après la règle connue. On sait que la propriété des coefficients des équations (2) appartient aussi aux coefficients de leurs équations inverses (6), et que l'on a

$$A_{r,s} = A_{s,r}. \qquad (7)$$

L'équation finale, résultat de l'élimination de x^1, x^2, x^3, ... x^{n-1} des n équations $m_0=0$; $m_1=0$; $m_2=0$, ... $m_{n-1}=0$, est

$$L = \Sigma \pm \alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \dots \alpha_{n-1,\, n-1} = 0 \ (^{**}). \qquad (8)$$

Tirons-en diverses expressions de la racine commune x et de ses puissances ; or, en omettant une des n équations $m_0=0$, $m_1=0$, ... $m_{n-1}=0$, on déduit des $n-1$ équations restantes, des rapports entre les inconnues ; et selon que l'équation donnée est la première, la seconde ou la $n^{ème}$, on aura n modes différents de déterminer ces rapports.

Si on n'admet pas l'équation $m_r = 0$, alors on déduit de (6) :

$$x^0 : x^1 : x^2 \dots : x^{n-1} = A_{0,r} : A_{1,r} : A_{2,r} \dots : A_{n-1,r}. \qquad (9)$$

d'où $x^{r'} : x^{s'} = A_{r',r} \dots : A_{s',r}$. On trouve de la même manière, en ne faisant point usage de l'équation $m_{r'}=0$:

$$x^r : x^s = A_{r,r'} : A_{s,r'} :$$

et comme $A_{r,r'} = A_{r',r}$, on a

$$x^{r'}x^s : x^{s'}x^r :: A_{s,r'} : A_{s',r} = A_{r',s} : A_{s',r}. \qquad (10)$$

Donc m et m' désignant deux quelconques des nombres 0, 1, 2, 3, ... $n-1$, le produit $x^m x^{m'}$ est proportionnel à $A_{m,m'}$; il s'ensuit que lorsque $r+s=r'+s'$, on a :

$$A_{r,s} = A_{r',s'}.$$

(*) Fonction cramerienne. Tm.

(**) Donc l'équation finale est une fonction cramérienne. Tm.

IV.

L'équation finale $L = 0$ n'est pas affectée d'un facteur superflu : car, comme les quantités $\alpha_{r,s}$ sont linéaires relativement à a_r et à b_r, il est clair que l'expression L monte à la dimension n relativement à chacune de ces deux constantes, et on peut établir *à priori* qu'une équation finale ainsi composée est débarrassée de tout facteur étranger.

En effet, Euler a jadis fait observer (anc. Mém. de l'Acad. de Berlin, IV, 1748) qu'on obtient l'équation finale vraie et pure, résultant de l'élimination de x entre les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, si l'on substitue toutes les racines de la seconde équation $\varphi(x) = 0$ dans $f(x)$, et qu'on égale à 0 le produit de toutes ces valeurs. Il est évident que les constantes de fx montent dans ce produit à une dimension marquée par le nombre des racines ou par le degré de l'équation $\varphi(x) = 0$; ainsi, comme ce qu'on dit d'une fonction doit se dire de l'autre, l'expression L renfermera aussi les constantes de $\varphi(x)$ à une dimension désignée par le degré de $f(x) = 0$; donc, dans le cas actuel, où les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont chacune de degré n, l'expression L relativement aux constantes de l'une et de l'autre fonction, monte au degré n par la nature de la question, et ne peut descendre à un degré moindre.

Toutes les fois donc que dans la suite de ces calculs nous tomberons sur une équation $M = 0$, M désignant une fonction rationnelle entière des constantes a_r, b_r, telle que relativement à l'une ou à l'autre de ces constantes le degré est moindre que n, nous en conclurons que cette équation ne saurait être l'équation finale, ni divisible par l'équation finale, mais que M est identiquement nul.

V.

Les expressions $A_{r,s}$ sont de la dimension $n-1$ par rapport à a_m et à b_m, donc l'équation trouvée ci-dessus $A_{r,s} = A_{r',s'}$ (lorsque $r+s=r'+s'$) est une identité, ou bien *toutes les quantités $A_{r,s}$ où la somme des indices est la même sont identiques*. Comme les expressions $A_{r,s}$ dépendent seulement de la somme des indices, nous écrirons par la suite

$$A_{r,s} = A_{r+s}. \qquad (11)$$

Cette mutation admise, nous voyons que *telle est la nature des coefficients $\alpha_{r,s}$ qui affectent les équations linéaires, desquelles on tire l'équation finale cherchée par l'élimination des inconnues*, que si l'on pose :

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{0,0}x_0 + \alpha_{0,1}x_1 + \alpha_{0,2}x_2 + \ldots + \alpha_{0,n-1}x_{n-1} = m_0 \\
\alpha_{1,0}x_0 + \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} = m_1 \\
\alpha_{2,0}x_0 + \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} = m_2 \\
\vdots \\
\alpha_{n-1,0}x_0 + \alpha_{n-1,1}x_1 + \alpha_{n-1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} = m_{n-1}
\end{array}\right\} (12)$$

les équations inverses, pour lesquelles les quantités x_r sont exhibées en m_r, prennent la forme :

$$\left.\begin{array}{l}
Lx_0 = A_0m_0 + A_1m_1 + A_2m_2 + \ldots + A_{n-1}m_{n-1} \\
Lx_1 = A_1m_0 + A_2m_1 + A_3m_2 + \ldots + A_nm_{n-1} \\
Lx_2 = A_2m_0 + A_3m_1 + A_4m_2 + \ldots + A_{n+1}m_{n-1} \\
\vdots \\
Lx_{n-1} = A_{n-1}m_0 + A_nm_1 + A_{n+1}m_2 + \ldots + A_{2n-2}m_{n-1}
\end{array}\right\} (13)$$

Si l'on substitue ces équations (13) dans une des équations (12),

$$\alpha_{r,0}x_0 + \alpha_{r,1}x_1 + \alpha_{r,2}x_2 + \ldots + \alpha_{r,n-1}x_{n-1} = m_r,$$

il vient :

$$\alpha_{r,0}A_r + \alpha_{r,1}A_{r+1} + \alpha_{r,2}A_{r+2} + \ldots + \alpha_{r,n-1}A_{r+n-1} = L; \qquad (14)$$

et si r et s sont différents, on a l'identité

$$\alpha_{r,0}A_s + \alpha_{r,1}A_{s+1} + \alpha_{r,2}A_{s+2} + \ldots + \alpha_{r,n-1}A_{s+n-1} = 0. \qquad (15)$$

Dans ces formules, r, s peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ... $n-1$.

VI.

Il suit des formules (10) et (11) :

$$x^{r+s'} : x^{s+r'} = A_{r'+s} : A_{s'+r},$$

où r, r', s, s' sont des nombres quelconques de la suite 0, 1, 2, ... $n-1$; ainsi toutes les fois qu'une valeur de x satisfait aux deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, et qu'on a par conséquent $L = 0$, les puissances x^m de x sont proportionnelles aux quantités A_m, m désignant un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... $n-1$, ou bien qu'on a :

$$1 : x : x^2 : x^3 \ldots : x^{2n-2} = A_0 : A_1 : A_2 : A_3 \ldots : A_{2n-2}. \qquad (16)$$

De là on peut déduire diverses relations entre les quantités A_0, A_1, ... A_{2n-2} lorsqu'en même temps il existe entre les constantes a_r, b_r l'équation conditionnelle $L = 0$; ainsi de (16) on déduit :

$$A_m A_{m'} = A_{m+m'} ; \quad A_0^{m-1} A_m = A_1^m, \qquad (17)$$

ou bien les expressions $A_m A_{m-1} - A_{m+m'}$; $A_0^{m-1} A_m - A_1^m$ sont divisibles par L.

Si l'on multiplie les équations proposées

$$0 = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_n$$
$$0 = \varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_n$$

successivement par 1, x, x^2 ... x^{n-2}, et qu'on remplace dans les produits les puissances x^m de x par les quantités proportionnelles A_m, il vient :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_0 A_1 + a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n \\ 0 &= a_0 A_1 + a_1 A_2 + a_2 A_3 + \ldots + a_n A_{n+1} \\ &\vdots \\ 0 &= a_0 A_{n-2} + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_n A_{2n-2} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Equations analogues en b. (19)

Mais les expressions à droite dans (18) montent seulement au degré $n-1$ relativement aux constantes b_m, et dans les équations (19) seulement au degré $n-1$ relativement aux constantes a_n ; donc, d'après les observations du § IV, *les équations* (18) *et* (19) *sont identiques*.

Nous avons vu qu'on peut former, avec les constantes qui affectent les équations proposées du $n^{ème}$ degré, $2n-1$ expressions (A_0, A_1 .... A_{2n-2}), expressions entières où les constantes de l'une et l'autre équation montent au degré $n-1$, et qui sont, toutes les fois que les équations ont une racine commune, proportionnelles aux puissances 0, 1, 2 .... $2n-2$ de la racine commune ; et il résulte facilement ce qui précède, qu'*il n'existe pas une telle expression qui soit proportionnelle à la puissance* $2n-1$ *de la racine commune*.

Car, soit A_{2n-1} une expression telle que l'on ait :

$$x^0 : x^1 : x^2 : \dots . x^{2n-2} : x^{2n-1} = A_0 : A_1 : A_2 \dots . : A_{2n-2} : A_{2n-1},$$

multipliant les deux équations proposées par x^{n-1} et remplaçant les puissances de x par les quantités proportionnelles en A_m, il vient :

$$a_0 A_{n-1} + a_1 A_n + a_2 A_{n+1} + \dots . + a_n A_{2n-1} = 0,$$
$$b_0 A_{n-1} + b_1 A_n + b_2 A_{n+1} + \dots . + b_n A_{2n-1} = 0.$$

Ces deux équations montant au même degré $n-1$ par rapport aux constantes sont identiques. La première de ces équations réunie aux équations (18) donne un système qui fournit les rapports entre a_0, a_1, a_2, ... a_4 ; la deuxième de ces équations, jointe aux équations (19), donne un système d'où l'on déduit les rapports entre b_0, b_1, ... b_n ; comme ces rapports proviennent de la même manière de deux systèmes identiques, on aura donc :

$$a_0 : a_1 : a_2 \dots . : a_n = b_0 : b_1 : b_2 \dots . : b_n :$$

ce qui est absurde

VII.

Soient M et N deux fonctions de x rationnelles, entières et de degré $n-1$; on peut toujours déterminer les $2n$ coefficients de ces fonctions de manière que l'expression

$$Mf(x) + N\varphi(x) = P$$

devienne égale à une expression donnée en x, rationnelle et entière et de degré $2n-1$. Cette détermination des coefficients de M et N exige la résolution de $2n$ équations linéaires entre deux inconnues. Appelons L le dénominateur commun aux valeurs algébriques de ces coefficients, obtenus par la résolution des équations ; et posons :

$$Mf(x) + N\varphi(x) = P = LQ$$

dont les coefficients de M et N sont des fonctions entières des constantes qui affectent $f(x)$, $\varphi(x)$ et Q.

Toutes les fois qu'on aura simultanément $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, on aura aussi $L=0$; car il est permis de faire $Q=1$. Cette équation, ne renfermant pas de x, n'est autre que l'équation finale cherchée et la même que nous avons trouvée ci-dessus. Euler est le premier qui ait indiqué cette méthode d'élimination (Acad. de Berlin, XX, an. 1764) (*). Montrons comment Q étant 1, ou égal à $x, x^2, x^3 \ldots x^{2n-1}$, ou à une fonction quelconque entière et d'ordre $2n-1$, les fonctions multiplicatrices M et N peuvent généralement être déterminées en

$$A_0, A_1, A_2 \ldots A_{2n-2}.$$

Substituant dans (13) x^r au lieu de x_r, où r est un des nombres 0, 1, 2 .... $n-1$, il vient :

$$Lx^r = A_r m_0 + A_{r+1} m_1 + A_{2+r} m_2 + \ldots + A_{n-1+r} m_{n-1}.$$

(*) Bezout a étendu cette méthode à un nombre quelconque d'équations. C'est le but de son célèbre traité des équations. Tm.

Dans cette valeur, si nous remplaçons $m_0, m_1, m_2 \dots m_{n-1}$ par leurs valeurs tirées de (2), § II, et ayant posé :

$$
\begin{aligned}
-M_r = {} & A_r\ [b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1] \\
& + A_{r+1}[b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_2] \\
& + A_{r+2}[b_n x^{n-3} + b_{n-1} x^{n-4} + \dots + b_3] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + A_{r+n-1} b_n ;
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
N_r = {} & A_r\ [a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1] \\
& + A_{r+1}[a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2] \\
& + A_{r+2}[a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \dots + a_3] \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + A_{r+n-1} a_n ;
\end{aligned}
$$

il vient :

$$M_r f(x) + N_r \varphi(x) = Lx^r. \qquad (21)$$

Le nombre r peut prendre seulement les valeurs $0, 1, 2 \dots n-1$; mais nous allons faire voir comment les fonctions multiplicatrices se déduisent de nos formules pour les valeurs $n, n+1, \dots 2n-1$ de r.

VIII.

Supposons que dans toutes les formules de ci-dessus, on remplace x par $\frac{1}{x}$ et a_r, b_r par a_{n-r}, b_{n-r} ; alors les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent $x^{-n} f(x)$; $x^{-n}\varphi(x)$. Par le même changement dans les formules (1) du paragraphe 2, on a :

$$
\begin{aligned}
M_r = {} & [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-r-1} x^{n-r-1}] \frac{\varphi(x)}{x^{2n-r-1}} \\
& + [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-r-1} x^{n-r-1}] \frac{f(x)}{x^{2n-r-1}} \\
= {} & -[a_{n-r} + a_{n-r+1} x + a_{n-r+2} x^2 + \dots + a_n x^r] \frac{\varphi(x)}{x^{n-1}} \\
& + [b_{n-r} + b_{n-r+1} x + b_{n-r+2} x^2 + \dots + b_n x^r] \frac{f(x)}{x^{n-1}} \\
= {} & -\frac{m_{n-1-r}}{x_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Les formules (2) du § II donnent :

$$\frac{-m_{n-1-r}}{x^{n-1}} = \alpha_{n-1,\,n-1-r} + \alpha_{n-2,\,n-1-r}\frac{1}{x} + \alpha_{n-3,\,n-1-r}\frac{1}{x^2} + \dots$$
$$\dots + \alpha_{0,\,n-1-r}\frac{1}{x^{n-1}}.$$

Ainsi, au moyen de ce changement, $\alpha_{s,r}$ se change en $-\alpha_{n-1-s,n-1-r}$. Je fais observer que, étant posées généralement les équations linéaires quelconques (2), si on remplace $\alpha_{s,r}$ par $\alpha_{n-1-s,\,n-1-r}$, alors dans les questions inverses (6) L restera invariable, $A_{r,s}$ se changera en $A_{n-1-r,\,n-1-s}$; si en même temps les coefficients $\alpha_{s,r}$ changent de signe, alors L et $A_{r,s}$ se changent en $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1}A_{r,s}$; de là, dans le cas actuel, pour le changement indiqué, L et A_r deviennent $(-1)^n L$ et $(-1)^{n-1}A_{2n-2-r}$. Ainsi, ayant remplacé x par $\frac{1}{x}$, et a_r, b_r par a_{n-r}, b_{n-r}, alors $f(x)$, $\varphi(x)$, m_r, $\alpha_{r,s}$, L, A_r se changent en $\frac{f(x)}{x^n}$, $\frac{\varphi(x)}{x^n}$, $\frac{m_{n-1-r}}{x^{n-1}}$, $\alpha_{n-1-r,\,n-1-s}$, $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1}A_{2n-2-r}$.

Faisant ces changements dans (20) et (21), et après avoir multiplié par $(-1)^n x^{2n-1}$, il vient :

$$M_{2n-1-r}f(x) + N_{2n-1-r}\varphi(x) = Lx_{2n-1-r}, \qquad (22)$$

où

$$\begin{aligned} M_{2n-1-r} = {} & A_{2n-2-r}\,[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\, b_{n-1}x^{n-1}] \\ & + A_{2n-3-r}\,[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\, b_{n-2}x^{n-2}] \\ & + A_{2n-4-r}\,[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\, b_{n-3}x^{n-3}] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + A_{n-1-r}x^{n-1}b_0\,; \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} -N_{2n-1-r} = {} & A_{2n-2-r}[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\, a_{n-1}x^{n-1}] \\ & + A_{2n-3-r}\,[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\, a_{n-2}x^{n-2}] \\ & + A_{2n-4-r}\,[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\, a_{n-3}x^{n-3}] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & A_{n-1-r}\,x^{n-1}a_0 \end{aligned}$$

Dans ces formules r peut prendre derechef les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$. Donc $2n-1-r$ peut prendre les valeurs n, $n+1$, $n+2$ .... $2n-1$. Ainsi toutes les fonctions multiplicatrices sont déterminées. De là on peut déduire facilement les expressions des mêmes fonctions lorsque

$$Q = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots l_{2n-1} x^{2n-1};$$

car on aura :

$$M = l_0 M_0 + l_1 M_1 + \dots l_{2n-1} M_{2n-1},$$
$$N = l_0 N_0 + l_1 N_1 + \dots l_{2n-1} N_{2n-1}.$$

IX.

Si $r < n$, nous déduisons des équations (20) les fonctions multiplicatrices par les formules

$$\left.\begin{aligned} -M_r &= \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x^2} + \frac{A_{r+2}}{x^3} + \dots + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right]\varphi(x), \\ N_r &= \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x^2} + \frac{A_{r+2}}{x^3} + \dots + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right]f(x), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

avec la condition de rejeter les puissances négatives de x.

Si $r \geqq n$, nous tirons de (23), en mettant r au lieu de $2n-1-r$,

$$\left.\begin{aligned} M_r &= [A_{r-1} + A_{r-2}x + A_{r-3}x^2 + \dots + A_{r-n}x^{n-1}]\varphi(x) \\ -N_r &= [A_{r-1} + A_{r-2}x + A_{r-3}x^2 + \dots + A_{r-n}x^{n-1}]f(x) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

en rejetant les puissances de x supérieures à $n-1$.

Au cas où les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont le facteur linéaire $x-\xi$ en commun, nous avons vu que l'on a $\xi_r = \frac{A_r}{A_0}$; d'où l'on conclut facilement que dans ce cas on a :

$$\left.\begin{aligned} -M_r &= A_0 \frac{\xi^r \varphi(x) - x^r \varphi(\xi)}{x-\xi} = A_0 \xi^r . \frac{\varphi(x)}{x-\xi} \\ N_r &= A_0 \frac{\xi^r f(x) - x^r f(\xi)}{x-\xi} = A_0 \xi^r \frac{f(x)}{x-\xi} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Euler a indiqué, dans le mémoire ci-dessus cité, la nature de ces fonctions multiplicatrices. — $A_0\xi^r\frac{d\varphi x}{dx}$ et $-A_0\frac{dfx}{dx}$ sont les valeurs que prennent M_r et N_r lorsqu'on suppose $x=\xi$.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION 177,

(Fin.) (V. p. 126.)

PAR M. LEGALLAIS,
Élève du Collége militaire de La Flèche.

Quatrième cas (fig. 23).

L'équation du lieu devient $y^2=-x^2+\sqrt{4R^2x^2+m^4}$, le signe — du radical devant évidemment être écarté ; l'origine est alors le point de contact des deux cercles.

Pour que y soit réel, il faut que $4R^2x^2+m^4$ soit $>x^4$, ou qu'on ait $x^4-4R^2x^2-m^4<0$, c'est-à-dire que x^2 soit compris entre les racines de l'équation $x^4-4R^2x^2-m^4=0$, qui sont $x_i^2=2R^2+\sqrt{4R^4+m^4}$, $x_{ii}^2=2R^2-\sqrt{4R^4+m^4}$. La limite x_{ii}^2 étant négative, doit être rejetée et remplacée par 0, c'est-à-dire que x doit être compris entre

$$+\sqrt{2R^2+\sqrt{4R^4+m^4}} \text{ et } -\sqrt{2R^2+\sqrt{4R^4+m^4}},$$

valeurs plus grandes que 2R en valeur absolue. Prenant donc A_i et A_{ii} pour ceux qui correspondent à ces valeurs, la courbe est comprise entre les parallèles à l'axe des y menés par ces points.

Pour $x=0$, on a $y=\pm m$; on devait s'y attendre. En effet, pour ce point, les deux tangentes sont égales, et par conséquent chacune d'elles est égale à m ; or les triangles omR, oCm sont égaux, donc $Cm=m$.

Passons maintenant à la discussion de la tangente pour déterminer, comme dans les cas précédents, la forme précise de la courbe. L'équation peut se mettre sous la forme

$$x^4 + (2y^2 - 4R^2)x^2 + y^4 - m^4 = 0, \qquad (5)$$

d'où $\tang \alpha = -\dfrac{4x^3 + 4y^2x - 8R^2x}{4y^3 + 4x^2y}$.

Pour $y = 0$, $\tang \alpha = \infty$, et il n'y a pas d'autre point où il en soit ainsi.

Pour que $\tang \alpha = 0$, il faut $4x^3 + 4y^2x - 8R^2x = 0$, ce qui donne encore, comme dans les autres cas, $x = 0$; puis il reste $x^2 + y^2 = 2R^2$, et, en combinant cette équation avec l'équation (5), on trouve à accoupler pour les points où la tangente est parallèle à l'axe des x :

$$x^2 = \frac{4R^4 - m^4}{4R^2}, \quad y^2 = \frac{4R^4 + m^4}{4R^2}.$$

Il y a donc à examiner trois cas : $4R^4 > m^4$, $4R^4 = m^4$, $4R^4 < m^4$.

1° x^2 est positif, et par conséquent x a des valeurs réelles bien déterminées; et si l'on compare y^2 à m^2, on voit que $4R^4$ étant $> m^4$, et par conséquent $2R^2 > m^2$, on pourra poser $2R^2 = m^2 + \delta^2$, d'où $y^2 = \dfrac{2m^4 + 2m^2\delta^2 + \delta^4}{2(m^2 + \delta^2)}$, tandis que $m^2 = \dfrac{4R^2m^2}{4R^2} = \dfrac{2m^4 + 2m^2\delta^2}{2(m^2 + \delta^2)}$, et qu'ainsi y^2 est $> m^2$. On voit donc qu'ayant pris (*fig.* 21) $CB' = CB'' = m$, il y aura quatre points m', m'', m''', m'''', symétriquement placés par rapport à l'origine, tels que leurs ordonnées soient plus grandes que $\overline{CB'}$ et $\overline{CB''}$, et qu'en ces points la tangente est parallèle à l'axe des x; rapprochant ce résultat de ceux que nous avons déjà obtenus, nous trouvons à la courbe la forme représentée dans la figure 21.

2° $x^2 = 0$, $y^2 = \dfrac{2m^4}{2m^2} = m^2$; cela n'indique réellement pas

de nouveaux points, puisque ce résultat nous ramène aux points B′ et B″. La courbe est celle de la figure 22.

3° $x^2 < 0$, x est imaginaire; il n'y a pas d'autres points que B′ et B″. C'est encore la courbe de la figure 22.

Cinquième cas (fig. 24).

$d > 2R$. Alors $R^2 - \frac{1}{4}d^2$ est < 0; nous poserons cette quantité égale à $-h^2$, h n'ayant plus ici une interprétation remarquable comme dans le troisième cas, mais étant facile à construire.

L'équation devient donc $y^2 = -h^2 - x^2 + \sqrt{d^2x^2 + m^4}$, le signe — devant être évidemment écarté.

Pour que y soit réel, il faut que $x^2 + h^2$ soit $< \sqrt{d^2x^2 + m^4}$, ou $x^4 + (2h^2 - d^2)x^2 + h^4 - m^4 < 0$, ce qui donne pour x^2 les limites

$$x_{\prime}^2 = \frac{d^2}{2} - h^2 + \sqrt{\frac{d^4}{4} - d^2h^2 + m^4},$$

$$x_{\prime\prime}^2 = \frac{d^2}{2} - h^2 - \sqrt{\frac{d^4}{4} - d^2h^2 + m^4}.$$

Il y a donc encore ici à examiner successivement $m^2 < h^2$, $m^2 = h^2$, $m^2 > h^2$.

1° $m^2 < h^2$, même courbe qu'au troisième cas, pour la même hypothèse.

2° $m^2 = h^2$; ici les deux ovales viennent réellement se réunir en passant par le centre, car le lieu actuel coïncide avec celui *des projections du centre d'une hyperbole sur des tangentes*, et cette génération, par suite de la propriété qu'ont les asymptotes de l'hyperbole d'être les limites des tangentes, nous indique déjà la forme de la courbe, semblable à une *lemniscate* ou à l'ovale de Cassini pour le cas de $d > m$. Ce que le calcul nous donnera ne va donc être en quelque sorte qu'une vérification. D'abord il est facile de vérifier la géné-

ration que nous venons d'indiquer; en effet, le changement de B^2 en $-B^2$ et de h^2 en $-h^2$ dans les calculs faits au troisième cas, nous donne ici pour les deux équations correspondantes :

$$A^2x^2 - B^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$
$$(d^2-2h^2)x^2 - 2h^2y^2 = (x^2+y^2)^2,$$

et l'on voit qu'il est facile de passer des deux cercles à l'hyperbole, et réciproquement. Cherchons maintenant la forme de la courbe. $x_{,,}^2$ devient nul; il n'y a que deux points de rencontre Q′ et Q″ avec l'axe des x. Pour $y=0$, on ne peut trouver d'autre valeur que $x=0$. En discutant la tangente, on voit qu'elle coïncide en C avec l'axe des x (*fig.* 24), et qu'elle est parallèle à cet axe en quatre autres points m', m'', m''', m''''. L'ensemble de ces renseignements lui assigne la forme que montre la figure.

3° $m^2 > h^2$, même courbe qu'au troisième cas, pour la même hypothèse.

Note. *Règle générale.* Toutes les fois que les termes du 4ème degré d'une ligne plane du quatrième ordre forment un carré parfait, la ligne est le lieu des projections d'un point fixe pris dans le plan d'une conique sur les tangentes à cette conique. (Voir t. III, p. 426.) Tm.

SUR LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ANALYTIQUE.

(V. p. 147.)

PAR M. BORGNET,
professeur de mathématiques au lycée de Tours (*).

—

§ IV. *Des coniques sphériques.*

Réduction de l'équation générale des lignes du deuxième

ordre à la forme unique $\frac{\tan^2 y}{\tan^2 b} + \frac{\tan^2 x}{\tan^2 a} = 1$. Conditions pour que l'équation générale des lignes du deuxième ordre représente un cercle. Quand on cherche le lieu du sommet d'un triangle sphérique dont la base et la surface sont constantes, on trouve une équation du deuxième degré; donc le lieu est une conique sphérique; de plus, les conditions précédentes sont remplies; donc cette conique est un petit cercle. C'est le beau théorème de Lexell. On trouve une ligne du deuxième ordre quand on cherche le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes est constante; le lieu est donc une conique sphérique : c'est le théorème de Fuss. On vérifie avec la même facilité le théorème de Magnus sur l'égalité des angles que forment, avec l'arc tangent à la conique, les deux arcs vecteurs menés des deux foyers au point de tangence, et tant d'autres propositions qui sont dues soit à M. Steiner, soit à M. Chasles.

J'étends aux coniques sphériques quelques belles propriétés des coniques planes, savoir : la propriété des pôles et ses polaires de La Hire; la propriété de l'involution de Desargues; la description d'une conique à la manière de Maclaurin et de Braikenridge; l'hexagramme de Pascal et le théorème correspondant de Brianchon. Je généralise ainsi ces deux dernières propriétés :

A. Si une conique sphérique est traversée par un triangle sphérique, on obtient, en menant sur la surface de la sphère les cordes des arcs interceptés entre les côtés, un second triangle sphérique dont les côtés et les sommets correspondent aux côtés et aux sommets du premier. Il arrive toujours que 1° les intersections des côtés correspondants sont placés sur une même circonférence de grand cercle; 2° les arcs qui unissent les sommets correspondants concourent au même point.

B. Si une conique sphérique est traversée par un triangle sphérique, on obtient, en menant une tangente à la conique par les deux extrémités de chaque côté, un second triangle dont les sommets (intersections de ces tangentes) correspondent aux sommets du premier triangle et dont les côtés ont aussi leurs correspondants parmi ceux du premier. Il arrive toujours que 1° les arcs de grand cercle qui unissent les sommets correspondants concourent au même point; 2° les intersections des côtés correspondants sont placées sur une même circonférence de grand cercle.

§ V. *Des lignes sphériques en général.*

Étant donnée l'équation d'une ligne sphérique quelconque, soit algébrique, soit transcendante, je forme l'équation de sa tangente en un point, celle de sa normale, l'équation générale de sa polaire; je détermine l'angle sous lequel se coupent deux lignes sphériques données par leurs équations.

Je forme quelques lieux géométriques, par exemple, le lieu du centre d'un cercle variable tangent à deux petits cercles fixes; c'est une conique sphérique : le lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une conique; c'est une ligne du quatrième ordre qui se réduit à une conique si l'angle est droit, d'où résulte que l'enveloppe des cordes de 90° inscrites à une conique est elle-même une conique, laquelle se réduit à un point si la conique proposée a un axe de 90°, etc., etc.

§ VI. *Emploi d'un autre système de coordonnées.*

Dans cette dernière partie, les lignes sphériques sont exprimées par des équations entre la longitude et la latitude de leurs points. Ces nouvelles coordonnées ont quelques avantages sur les coordonnées employées plus haut, comme de représenter d'une manière plus simple certaines lignes dont

l'usage est le plus fréquent, le cercle, par exemple, et de donner des formules aussi plus simples pour la quadrature, la rectification et l'angle formé par deux courbes en se coupant; mais, sous un point essentiel, le nouveau système le cède à l'autre, c'est qu'il n'offre pas de caractères pour la classification des courbes, de sorte qu'une même ligne n'est plus reconnaissable à son équation lorsqu'elle présente des différences de position par rapport aux axes.

J'établis les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre système; j'applique le nouveau système à la détermination des espaces quarrables de Viviani, à la rectification de la loxodromie sphérique, à la formation de l'équation des projections stéréographiques, à la considération de la spirale de Pappus et d'une Clélie de Guido Grandi, etc.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 179
(V. p. 75 et 106) (*).

PAR M. JULES LESEURRE,
élève de l'institution Barbet.

Un point est situé à l'extérieur, sur le contour ou à l'intérieur d'une parabole, suivant que les coordonnées satisfont aux relations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F > 0\,;\quad A > 0$$
$$= 0$$
$$< 0.$$

(*Fig.* 27.) Cela posé, prenons pour axes deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère en question, soit OA $=\alpha$; OB $=\alpha'$;

(*) Voir le lemme, p. 106. Tm.

$OC = 6$; $OD = \beta'$; $y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, l'équation de la parabole passant par ABCD, on a :

$$D = -(\alpha+\alpha') \; ; \; F = \alpha\alpha' \; ; \; \frac{F}{C} = 66' \; ; \; C = \frac{\alpha\alpha'}{66'} \; ; \; E = \frac{66'}{\alpha\alpha'}(6+6') ;$$

$$B = \pm 2\sqrt{\frac{\alpha\alpha'}{66'}}.$$

Pour la conique passant par le cinquième point $E(\gamma,\delta)$, on a :

$$B'^2 = \left(\frac{\delta^2 + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F}{\gamma\delta}\right)^2 ;$$

donc les inégalités se réduisent à

$$\left(\frac{\delta^2+C\gamma^2+D\delta+E\gamma+F}{\gamma\delta}\right)^2 - B^2 > 0. \text{ On a une hyperbole.}$$

$$= 0. \qquad \text{parabole.}$$

$$< 0. \qquad \text{ellipse.}$$

ou bien

$$(\delta^2 - B\gamma\delta + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F)\;(\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F) > 0.$$

$$= 0.$$

$$< 0.$$

Or les deux facteurs du premier membre ne sont autre chose que les polynômes obtenus en substituant à la place de x et y dans les équations des deux paraboles passant par A B C D les coordonnées du point E.

Or, suivant que ces deux facteurs seront, 1° tous deux positifs ou négatifs, 2° l'un nul et l'autre quelconque, 3° l'un positif et l'autre négatif, on aura pour la conique une hyperbole, une parabole ou une ellipse. D'après le principe rappelé ci-dessus, le cinquième point est dans le premier cas à l'intérieur ou à l'extérieur des deux paraboles; dans le deuxième, sur l'une des deux paraboles; dans le troisième, à l'extérieur de l'une et à l'intérieur de l'autre : ce qui démontre le théorème énoncé.

SUR LE CENTRE DE FORCES NON PARALLÈLES de Minding, d'après Mœbius (Crelle, XVI, 1-1836)

—

I. Dans tout ce qui suit, on suppose un système de forces appliquées à un corps ou à un système de points liés entre eux d'une manière *invariable*. Le système de points éprouve un déplacement, mais, dans ce déplacement, chaque point d'application conserve sa force la même en intensité, direction et sens. C'est ce qu'il ne faut jamais perdre de vue.

A. *Système de forces parallèles.*

a) *Résultante*. Quelque déplacement que subit le système, la résultante passe toujours par un même point lié invariablement aux points du système et qui est le centre des forces parallèles.

b) *Équilibre*. Soit A le centre et R la résultante des forces parallèles agissant dans un sens et B le centre, et —R la résultante des forces parallèles agissant dans le sens opposé; AB est dans la direction des forces. Dans un déplacement, R et —R forment un couple et l'équilibre est détruit, trois cas exceptés:

1° Lorsque A et B se confondent; 2° lorsque le système se déplace parallèlement à lui-même; 3° lorsque le système tourne autour d'un axe parallèle à la direction des forces. Du reste, on peut appliquer à deux points A′ et B′ deux nouvelles forces égales agissant dans la direction des forces et en sens opposés, A′B′ étant aussi dans la direction des forces; l'équilibre subsiste encore, et alors l'équilibre aura lieu dans tout déplacement, puisque les forces introduites formeraient un couple tenant en équilibre l'autre couple.

c) *Couple*. Rentre dans le cas précédent.

B. *Systèmes de forces dans un même plan.*

Le corps se meut parallèlement à lui-même, ou tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan.

a) *Résultante de deux forces.* Soit A le point de rencontre des deux forces, et B, C leurs points d'application ; la résultante passera toujours par le point A′, seconde intersection de la résultante avec le cercle passant par les points A, B, C ; le point A′ lié invariablement aux points B et C est donc le *centre* des deux forces. C'est une conséquence immédiate de l'égalité des angles inscrits dans un segment de cercle.

Résultante d'un nombre quelconque de forces. On prend deux forces quelconques et on les remplace par une force unique appliquée au *centre* de ces deux forces ; par là le nouveau système a une force de moins, et continuant de même, on parvient à deux forces dont le *centre* est celui du système primitif.

Comme le système n'a qu'un *centre*, il est indifférent dans quelque ordre on fasse la composition des forces, ce qui donne lieu à d'élégantes propositions géométriques.

b) *Équilibre.* Soit *n* forces ; considérons une force P appliquée en A ; les $n - 1$ forces restantes auront une résultante $-$P, qu'on peut considérer comme appliquée à leur centre B. Prenons dans le corps deux points quelconques A′, B′, tels que A′B′ soit parallèle à AB, et appliquons en A′ une force $+$S, en B′ une force $-$S ayant la direction A′B′, et telles que $S.A'B' = P.AB$; l'équilibre subsistera alors toujours lorsque le plan tournera dans son plan.

c) *Couple.* Se réduit au cas précédent.

C. *Système de forces dans l'espace en général.*

a, 1) *Équilibre.* Un corps passant d'une position dans une autre, on peut toujours trouver une direction telle que le

corps, dans sa première position, tournant autour d'un axe ayant cette direction, prenne une position parallèle à la seconde; et si le corps, tenu en équilibre dans sa position première, reste encore en équilibre après un mouvement de rotation autour de l'axe ci-désigné, il restera encore en équilibre dans une rotation quelconque autour de cet axe et par une translation parallèle.

Nous nommerons *axe d'équilibre* une droite telle que l'équilibre n'est pas troublé, le corps tournant autour de cet axe. Ainsi, dans un système de forces parallèles en équilibre, toute droite parallèle à la direction des forces est un axe d'équilibre.

a, 2) Pour qu'une droite soit un axe d'équilibre, il est *nécessaire* et *suffisant* que cette droite soit un axe d'équilibre pour les forces projetées avec leurs points d'application sur un plan perpendiculaire à cette droite, et ensuite qu'en projetant chaque force sur une droite menée par son point d'application, parallèlement à l'axe d'équilibre, le système projeté soit en équilibre.

a, 3) Lorsqu'un système a deux axes d'équilibre non parallèles, toute droite parallèle au plan déterminée par les deux axes d'équilibre sera aussi un axe d'équilibre.

De là on conclut facilement que si le système a trois axes d'équilibre tels que l'un n'est pas parallèle au plan déterminé par les deux autres, alors une quatrième droite quelconque sera axe d'équilibre; ou, en d'autres termes, si un corps en équilibre est maintenu dans cet état, dans trois déplacements, il sera encore en équilibre en un quatrième déplacement; ou autrement, tout corps en équilibre en quatre positions diverses reste en équilibre dans une cinquième position.

a, 4) Un système en équilibre n'a pas, en général, un *axe d'équilibre*. Toutefois il est toujours possible d'ajouter au système en équilibre deux nouvelles forces égales et directe-

ment opposées, agissant sur deux points déterminés du corps et conservant même intensité, direction et sens ; et par là le corps acquiert un axe d'équilibre, ce qu'on peut énoncer aussi de cette manière : L'équilibre d'un corps tournant autour d'un axe est détruit et se change en un couple dont les forces R et —R peuvent agir sur des points A, B du corps, conservant toujours même intensité, sens et direction.

Les points A et B sont pris arbitrairement ; mais la direction AB est déterminée ainsi que le produit R.AB.

b, 1) *Non en équilibre.* On peut produire l'équilibre par l'introduction de deux nouvelles forces, et on peut déterminer ces forces d'une infinité de manières, de telle sorte que le système tournant autour d'un axe donné reste en équilibre ; car il existe un hyperboloïde à une nappe, déterminé par la nature du système et par la position de l'axe de rotation, et tel qu'on peut prendre arbitrairement les deux points d'application des deux nouvelles forces sur une des droites génératrices de la surface.

b, 2) Les deux nouvelles forces peuvent se déterminer, ainsi que leurs points d'application, de *deux* manières ou d'*aucune* manière, de telle sorte 1° que la droite qui réunit les deux points d'application devienne *axe d'équilibre* ; et de là, en rendant fixe cet axe, le corps, en tournant autour, conservera son équilibre sans que l'on ait besoin d'ajouter deux forces, et 2° que les pressions sur l'axe restent les mêmes en direction et intensité pendant la rotation. Nous nommerons un tel axe *axe principal d'équilibre*.

Ainsi, par exemple, dans un système de deux forces qui ne sont pas dans un même plan, l'un des *axes principaux* est la droite qui joint les deux points d'application, et l'autre est la droite perpendiculaire à un plan déterminé par les deux droites, et rencontrant ce plan au centre des deux forces projetées sur ce plan.

Ceci a lieu aussi pour deux forces non parallèles situées dans un même plan, et lorsque l'on a égard, non à la rotation dans le plan, comme en B, mais à une rotation quelconque.

Système de forces parallèles à un même plan, ou dans un même plan. On mène dans le plan deux droites *a, b*, et l'on décompose chaque force P du système au point d'application en deux autres X et Y, parallèles à ces droites, et l'on détermine la résultante $X_{,}$ des forces X et le centre A de ce système; et de même la résultante $Y_{,}$ du système Y et le centre B; alors dans tout déplacement du corps le système est équivalent aux forces $X_{,}$, $Y_{,}$, agissant en A et B, et a, par conséquent, deux axes principaux dont l'un est la droite AB et l'autre une droite coupant perpendiculairement le plan au centre des forces projetées sur ce plan. De là on déduit ce théorème remarquable :

α) Si l'on a un système de forces parallèles à un plan et ayant une résultante, si l'on décompose chaque force à son point d'application en deux autres parallèles à deux droites *a*, *b* quelconques menées dans le plan, la droite qui joint les deux centres de forces parallèles a une position indépendante des droites *a* et *b*, nous nommerons cette droite *ligne centrale du système.*

Ce théorème se généralise ainsi :

β) Étant donné un système de forces non en équilibre et ne se réduisant pas en un couple, si l'on décompose chaque force en son point d'application en trois autres, X, Y, Z, parallèles à trois droites arbitraires, *a*, *b*, *c*, non parallèles au même plan, les trois centres des systèmes X, Y, Z sont dans un plan indépendant des droites *a*, *b*, *c*; nous nommons ce plan *plan central du système.*

Si les droites *a*, *b* sont parallèles au *plan central* et *c* perpendiculaires à *a* et *b*, alors, selon *α*), les centres des sys-

tèmes X et Y sont dans une même droite, située, selon β), dans le plan central; nous la désignons sous le nom de *ligne centrale* d'un système de forces quelconques, agissant dans l'espace. Si de plus la droite a est parallèle à la ligne centrale, et que b soit perpendiculaire sur a, alors nous nommons le centre des forces X, parallèles à a, le *point central* du système.

Les deux axes principaux ont, relativement à ce plan, ligne et point centraux, la position remarquable suivante :

b 3) Les deux axes principaux, lorsqu'ils existent, et la ligne centrale, sont parallèles au même plan; les deux points d'intersection des axes principaux avec le plan central, et le point central sont sur une même droite perpendiculaire à la direction de la résultante des forces transportées à un même point.

c, 1) *Système de forces dans l'espace ayant une résultante.* Lorsqu'un tel système tourne autour d'un axe, il se réduit à deux forces qu'on peut transporter, sans changer la direction ni l'intensité, à deux points déterminés du corps, et qui ne peuvent se réduire à une seule force que dans la position initiale du corps, et ensuite après une demi-rotation.

c) Dans un tel système, les deux axes principaux existent toujours, c'est-à-dire on peut toujours déterminer deux droites, coupant la résultante en deux *points*, et telles qu'en tournant le corps autour d'une de ces droites, le système ne cesse pas de se réduire en une résultante de même direction et intensité que la résultante initiale; que par conséquent, lorsque un de ces points d'intersection est rendu fixe, alors l'équilibre subsistera en tournant autour de l'axe passant par ce point. Ainsi les deux points peuvent être considérés comme de vrais centres du système, quoique par rapport à chacun l'équilibre ne subsiste que relativement à un axe déterminé.

Ces deux axes ont une telle position : 1° leurs projections

sur un plan perpendiculaire à la résultante se coupent à angle droit; 2° de même leurs projections sur le plan central; 3° la ligne centrale est parallèle au plan déterminé par les deux axes; 4° les deux points d'intersection du plan central, et les deux axes et le point central seul, sont une même droite qui est à angle droit sur la résultante.

d) *Système de forces dans l'espace, réductible à un couple.* Un tel système n'a pas *en général* d'axes principaux; s'ils existent, ils sont en nombre infini; chaque parallèle à un axe principal devient un axe principal. Nous terminerons par cette observation. Si un corps soumis aux actions d'un système de forces a un axe fixe, et s'il doit conserver l'équilibre en le faisant tourner autour de cet axe, et si on n'exige pas que cet axe, ainsi que cela doit être pour un axe principal, supporte pendant la rotation une pression constante en direction et intensité, alors si le système se réduit à une force unique ou à deux forces, cet axe peut avoir une direction quelconque. Il suffit de projeter toutes les forces sur un plan perpendiculaire à la direction donnée; la droite passant par le centre de ces forces (B, *b*) parallèlement à la direction donnée sera l'axe cherché. Excepté le cas où le système se réduisant à une résultante, on voudrait que l'axe fût parallèle à cette résultante, et si les forces avec leurs points d'application étant projetées sur un plan perpendiculaire à la résultante, chaque point projeté n'est pas le centre des autres forces; lorsque cette dernière condition existe, on peut prendre pour axe toute parallèle à la résultante.

Note. Ces belles propriétés ont été trouvées par M. Minding, et sont consignées dans trois mémoires allemands insérés au journal de M. Crelle, savoir : XIV, 289, 1835; XV, 27 et 313, 1836; ces mémoires, qu'on étudie avec un intérêt soutenu, contenant 172 équations, auraient besoin d'être considérablement abrégés pour entrer dans notre recueil.

Voici une idée de ce travail : soit un système de forces dans l'espace appliqué à un système de points liés entre eux d'une manière invariable ; concevons les forces transportées parallèlement à un seul point fixe où elles formeront un faisceau ; faisons tourner ce faisceau autour d'un axe quelconque passant par le point fixe, ensuite menons par chaque point d'application une parallèle à la force correspondante des faisceaux dans sa nouvelle position, conservant même intensité et même sens. On voit que le mouvement du corps que prescrit M. Mœbius ne diffère pas de celui des forces que prescrit M. Minding. Voici maintenant quelques propriétés découvertes par M. Minding et non mentionnées par M. Mœbius.

1° Prenons dans le *plan central* trois centres *conjugués* de forces parallèles et trois résultantes qui agissent en ces points ; transportons ces trois résultantes en grandeur et en direction en un point, on aura les trois arêtes d'un tétraèdre ; le volume de ce tétraèdre, multiplié par l'aire du triangle qui a pour sommet les trois centres, est un produit constant.

2° Si les trois centres sont sur une même droite, alors dans le mouvement de rotation les trois centres restent fixes et les résultantes tournent autour.

3° Si les trois centres se confondent, le système se réduit à une résultante qui passe par ce point dans tous les mouvements de rotation.

4° Soit un système de forces dans l'espace, ni en équilibre ni réductible à un couple ; il existe une infinité de mouvements de rotation qui amènent le système à avoir une résultante ; toutes ces résultantes passent par une ellipse et une hyperbole ayant le *point central* pour centre commun, et dont les plans sont perpendiculaires entre eux et sur le *plan central* ; les foyers d'une de ces coniques sont les sommets de l'autre.

NOTE

sur une propriété des centres des courbes algébriques
(V. t. II, p. 210, et t. V, p. 228),

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

On démontre facilement que si deux cordes d'une section conique se coupent mutuellement en deux parties égales, leur point d'intersection est le centre de la courbe. Cette propriété est susceptible de généralisation, comme il suit.

Théorème. *Si* m *droites se coupent en un point dans le plan d'une courbe algébrique de degré* m, *et que leurs rencontres réelles ou imaginaires avec la courbe soient distribuées deux à deux à égale distance de ce point, celui-ci est un centre.*

En effet, l'équation de la courbe que je suppose, pour plus de facilité, rapportée à des axes passant par le point d'intersection commun des m droites, peut être mise sous la forme rationnelle et entière :

$$u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

u_i représentant l'ensemble des termes de degré i en x et y. D'après l'hypothèse de l'énoncé, si l'on pose $y = \alpha x$, on pourra trouver m valeurs α', α'', α'''... de α, qui donneront des valeurs de x égales deux à deux et de signes contraires. Or la substitution de αx à la place de y transforme l'équation ci-dessus en celle-ci :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + u_0 = 0;$$

où le coefficient A_i de x^i est une fonction entière de α, de

degré i. Pour que les valeurs de x qui satisfont à cette équation soient égales deux à deux et de signes contraires, il faut et il suffit que l'on ait $A_{m-1} = 0$, $A_{m-3} = 0$, $A_{m-5} = 0$, etc., c'est-à-dire que les coefficients des termes de rang pair soient nuls ; mais on admet que cela arrive pour m valeurs α', α'', α''' .. ; donc les équations $A_{m-1} = 0$, $A_{m-3} = 0$... qui sont toutes de degrés inférieurs à m, auraient chacune m racines, ce qui ne peut avoir lieu sans que tous leurs coefficients soient nuls ; donc les fonctions u_{m-1}, u_{m-3}, u_{m-5}... de rang pair sont identiquement nulles dans l'équation de la courbe, ce qui est la condition pour que l'origine en soit le centre.

Remarques. I. On peut demander quels sont, dans le plan d'une courbe algébrique de degré m, les points par lesquels il est possible de mener $m-n$ droites jouissant de la propriété dont on vient de parler, c'est-à-dire rencontrant la courbe symétriquement à des distances égales de ce point.

Le raisonnement ci-dessus fait voir que les fonctions de α de rang pair A_{m-1}, A_{m-3}... doivent disparaître lorsque leur indice est moindre que $m-n$; celles qui sont d'un degré plus élevé ne disparaissent point, mais s'annulent pour un nombre $m-n$ de valeurs de α, inférieur à leur degré. On peut donc les mettre sous la forme

$$A_{m-1} = a_{m-1}(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')...$$
$$A_{m-3} = a_{m-3}(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')...$$

a_i étant une fonction entière de α. Or $\alpha = \frac{y}{x}$; donc $\frac{u_{m-1}}{x^{m-1}}$, $\frac{u_{m-3}}{x^{m-3}}$... sont divisibles par $\left(\frac{y}{x} - \alpha'\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha''\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha'''\right)$... ; donc aussi u_{m-1}, u_{m-3}... sont divisibles par une même fonction entière et homogène des variables x, y.

Par conséquent, la condition cherchée est que les polynômes u_{m-1}, u_{m-3}... qui ne disparaissent point, admettent

un commun diviseur du degré $m-n$. Ce commun diviseur, égalé à 0, donne les $m-n$ droites, qui se comportent comme si l'origine était un centre.

Il résulte de cette théorie que de chaque point d'une ligne du troisième ordre on peut mener deux droites qui rencontrent cette ligne à égale distance de ce point.

II. Le théorème ci-dessus s'étend aux surfaces, car on voit d'abord que si d'un point on peut mener m plans qui coupent une surface de degré m suivant des courbes douées de centre, ce point est lui-même le centre de cette surface.

En effet, un plan quelconque mené par le point dont il s'agit coupera la surface suivant une courbe de degré m, et ses intersections avec les m plans donnés se trouveront dans les conditions qui forment l'objet de cet article; en d'autres termes, toute section plane de la surface sera douée d'un centre, etc. c. q. f. d.

Mais il y a plus : on peut se demander combien de droites menées d'une manière quelconque par un point, dans ces mêmes conditions, sont nécessaires pour que la surface ait un centre.

Considérons l'équation aux trois variables x, y, z.

$$u_m + u_{m-1} + \ldots + u_2 + u_1 + {}_0 = 0,$$

où u_i est un polynôme homogène et entier de degré i en x, y, z. Posons $y = 6x$, $z = \gamma x$, nous aurons :

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + u_0 = 0,$$

A_i étant une fonction de 6 et de γ. Il est nécessaire et il suffit que les systèmes donnés de valeurs de 6 et de γ soient tels que les coefficients de celles de ces fonctions qui sont de rang pair ne puissent différer de 0.

Or A_{m-1}, qui est du degré le plus élevé, renferme au plus $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients; si donc on a $\frac{m(m+1)}{2}$ droites qui ren-

contrent la surface comme si l'origine était au centre, c'est-à-dire $\frac{m(m+1)}{2}$ systèmes de valeurs de β et de γ qui annulent A_{m-1}, A_{m-3}, A_{m-5}, etc., on aura, pour déterminer chacun des $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients de A_{m-1}, autant d'équations du premier degré, lesquelles seront satisfaites en général en égalant à 0 tous les coefficients, et ne pourront l'être d'aucune autre manière. A plus forte raison en sera-t-il de même des coefficients moins nombreux, de A_{m-3}, A_{m-5}, etc.

Donc $\frac{m(m+1)}{2}$ est le nombre cherché.

On suppose ici tacitement que les équations $A_{m-1}=0$, $A_{m-3}=0$, etc., ne rentrent pas les unes dans les autres, et que les systèmes de valeurs de β et γ sont en dehors des conditions toutes particulières qui pourraient faire tomber en défaut le raisonnement employé.

Pour fixer les idées, regardons β et γ comme les coordonnées d'un point. Déterminer les $\frac{m(m+1)}{2}$ coefficients des A_{m-1}, c'est faire passer une courbe du degré $m-1$ par $\frac{m(m+1)}{2}$ points donnés. Or nous savons que $\frac{m(m+1)}{2}-1$ points suffisent ; donc, si le point qui est assigné au delà de ce nombre ne se trouve pas sur la courbe qui passe par les $\frac{m(m+1)}{2}-1$ premiers, tous les coefficients seront nuls.

Aux polynômes A_{m-3}, A_{m-5} correspondraient des groupes de $\frac{m(m+1)}{2}$ points, comme pour A_{m-1} ; à plus forte raison les coefficients seront-ils nuls pour ces polynômes.

QUESTION PROPOSÉE

au concours d'admission à l'École normale en 1847
(Voir VI, 406).

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur au lycée de Saint-Omer.

—

On donne sur un plan un nombre quelconque de points A, B, C... ; par une origine fixe O choisie à volonté sur ce plan, on mène un nombre infini de droites, et sur chacune d'elles on porte une longueur OM réciproquement proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur cette droite des différents points A, B, C.....

On demande :

1° Le lieu des points M obtenus de cette manière ;

2° S'il est toujours possible, les points A, B, C... restant fixes, de choisir l'origine O de telle sorte que ce lieu devienne une circonférence ;

3° Examiner si la courbe cherchée est toujours fermée pour toutes les positions du point O ;

4° Lorsque cela a lieu, trouver où le point O doit être placé pour que les points A, B, C... restant fixes, l'aire totale soit la plus grande possible.

1° Prenons pour axes deux droites perpendiculaires passant par le point O, et nommons (x', y'), (x'', y''), (x''', y''')... les coordonnées des points donnés A, B, C .... L'équation d'une droite OM sera $y=\alpha x$, et la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite sera $\pm\frac{y'-\alpha x'}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Celles

des autres perpendiculaires auront des expressions analogues,

de sorte que $OM = \dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{(y'-\alpha x')^2+(y''-\alpha x'')^2+\dots}}$.

Mais $OM = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\alpha = \dfrac{y}{x}$, ce qui donne pour équation du lieu cherché :

$$(y'x-yx')^2+(y''x-yx'')^2+\dots\dots=1,$$

ou bien

$$x^2(y'^2+y''^2+y'''^2\dots)+y^2(x'^2+x''^2+x'''^2\dots)-$$
$$-2xy(x'y'+x''y''\dots)=1.$$

équation d'une ellipse.

2° Si, au lieu de mener les droites OM du point O, on les menait d'un autre point O' ayant pour coordonnées a et b par rapport au système d'axes précédents, on trouverait la même équation dans laquelle y', y''... et x', x''..., seraient remplacés par $y'-b$, $y''-b$... et $x'-a$, $x''-a$..., de sorte que l'équation du lieu serait alors

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\dots]+y^2[(x'-a)^2+(n''+a)^2\dots]-$$
$$-2xy[(x'-a)(y'-b)\dots]=1.$$

Ce lieu pourra donc être une circonférence, si l'on peut disposer de a et b de manière à avoir

$$(y'-b)^2+(y''-b)^2\dots=(x'-a)^2+(n''-a)^2\dots,$$

et $$(y'-b)(x'-a)+(y''-b)(x''-a)\dots=0;$$

ou bien en nommant X et Y les coordonnées du centre de gravité des points donnés considérés comme d'égal poids, et faisant pour abréger $y'^2+y''^2\dots=\Sigma y'^2$, $x'^2+x''^2\dots=\Sigma x'^2$ et $x'y'+x''y''\dots=\Sigma x'y'$, et désignant par n le nombre des points A, B, C...,

$$n(b^2-a^2)-2nYb+2nXa+\Sigma y'^2-\Sigma x'^2=0,$$

et $$nab-2nXb-2nYa+\Sigma x'y'=0.$$

Or, si dans chacune de ces équations on considère a et b

comme coordonnées courantes, chaque équation ci-dessus appartient à une hyperbole équilatère ayant pour centre le point (X, Y), et ces deux courbes se rencontrent en deux points, puisque les axes de l'une sont parallèles aux asymptotes de l'autre. Donc, en prenant pour a et b les valeurs des coordonnées de l'un ou de l'autre de ces points, et y mettant l'origine des droites OM, le lieu cherché sera une circonférence.

3° Si les points A, B, C... étaient en ligne droite et que l'origine des droites OM fût prise sur cette droite, en prenant l'axe des y parallèles à cette ligne, on aurait $x'-a=0$, $x''-a=0\ldots$, d'où

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots]=1$$

pour équation du lieu cherché, qui dans ce cas se réduirait à deux droites parallèles à celle des points A, B, C...

4° $Ay^2+Bxy+Cx^2=1$ étant l'équation d'une ellipse rapportée à des axes rectangulaires, si on la rapporte à ses axes a', b' on aura, comme on sait, $a'^2b'^2=\dfrac{4}{4AC-B^2}$; et pour que l'aire de l'ellipse ou $\pi a'b'$ soit maximum, il faut que $4AC-B^2$ soit un minimum.

Or, en supposant que l'origine des coordonnées est aussi celle des droites OM, nous avons obtenu pour le lieu cherché l'ellipse ayant pour équation

$$x^2(y'^2+y''^2\ldots)+y^2(x'^2+x''^2\ldots)-2xy(x'y'+x''y''\ldots)=1.$$

Prenons pour cette origine le centre de gravité des points A, B, C...; alors $y'+y''\ldots=0$, $x'+x''\ldots=0$. Si l'origine des droites OM avait été un autre point ayant pour coordonnées a et b par rapport au système précédent d'axes coordonnés, on aurait trouvé

$$x^2[(y'-b)^2+(y''-b)^2\ldots]+y^2[(x'-a)^2+(x''-a)^2\ldots]-$$
$$2xy[(x'-a)(y'-b)\ldots]=1,$$

ou bien

$$x^2(\Sigma y'^2+nb^2)+y^2(\Sigma x'^2+na^2)-2xy(\Sigma x'y'+nab)=1.$$

L'expression $4AC-B^2$ se trouve être alors

$$\Sigma x'^2 y'^2+n\Sigma(bx'-ay')^2-(\Sigma x'y')^2.$$

En désignant par $\Sigma[(bn'-ay')^2]$ la somme

$$(bx'-ay')^2+(bx''-ay'')^2\ldots\ldots,$$

cette expression est minimum pour $x', y', x'', y''\ldots\ldots$ constants lorsque a et b sont nuls. Donc la courbe correspondant à l'aire maximum sera celle qu'on obtiendra en prenant pour origine des lignes OM le centre de gravité des points donnés.

Note. Cette question a aussi été traitée par M. P. Serret.

SOLUTION DE LA QUESTION 175 (t. VII, p. 45).

PAR M. N. EMERY,
élève du lycée de Versailles.

La courbe, lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles tangentes à un cercle donné et ayant pour foyer commun un point fixe sur la circonférence du même cercle, a pour équation entre les coordonnées polaires :

$$\rho^{\frac{1}{3}}=d^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\omega}{3}.$$

(Strebor.)

Fig. 28. Soient O le centre du cercle donné, et F le point fixe, foyer de toutes les paraboles, prenons pour pôle le point F et pour axe polaire la droite FO; considérant une de ces paraboles, soit A le point où elle est tangente au cercle; on connaît donc ce foyer, une tangente et son point de contact; il est par suite facile de déterminer le sommet de la parabole.

Joignons en effet FA, menons AC, faisant avec Ax un angle égal à l'angle OAC, par le point F menant DF, parallèle à AC, on aura l'axe; abaissant KF perpendiculaire sur Dx, et menant KB perpendiculaire sur DF, B sera le sommet.

Désignons la distance BF par ρ et l'angle BFz par ω; en exprimant que AF = DF, on arrive facilement à l'équation du lieu. Du point O, abaissons OG perpendiculaire sur AF, le triangle rectangle FGO donne :

$$FG = FO \cos \frac{\omega}{3},$$

car $$OFG = GFK = KFD = \frac{\omega}{3};$$

par suite $$FA = d \cos \frac{\omega}{3},$$

d désignant le diamètre du cercle. D'un autre côté le triangle rectangle DKF donne :

$$\rho \times DF = \overline{KF}^2,$$

mais $$\overline{KF}^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \frac{\omega}{3}};$$

donc $$DF = \frac{\rho}{\cos^2 \frac{\omega}{3}}.$$

Ainsi l'équation du lieu est :

$$d \cos \frac{\omega}{3} = \frac{\rho}{\cos^2 \frac{\omega}{3}},$$

ou bien $$\rho = d \cos^3 \frac{\omega}{3}.$$

Je profite de cette occasion, pour faire remarquer deux fautes qui existent dans le premier volume.

Page 492, ligne 11 en remontant, on lit :

« L'équation générale étant rapportée au centre, on a, par la résolution de l'équation, $2Cx + By = 0$; $y = \frac{k'}{m}$; système de diamètres conjugués dont le second est parallèle à l'axe des x. »

Le système de diamètres conjugués est représenté par les équations :

$$2Cx + By = 0 \text{ et } y = 0.$$

Enfin page 494, l'équation

$$m^3 \sin^2 \gamma u^2 - 4LN[3m \sin^2 \gamma - 4N^2]u - 4L^2 \sin^2 \gamma = 0$$

n'est pas exacte, il faut

$$m^3 \sin^2 \gamma u^2 + 4LN[4N^2 + 3m \sin^2 \gamma]u - 4L^2 \sin^4 \gamma = 0.$$

Note. MM. Mention et Paul Serret ont donné la même solution du problème 175.

NOTE

sur un théorème de la théorie des propriétés projectives de M. Poncelet,

PAR M. PAUL SERRET.

—

1. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Théorème. Si deux des côtés AB, AC d'un triangle ABC inscrit à une conique, pivotent constamment autour des points fixes P, P', le troisième côté BC enveloppera une conique doublement tangente à la proposée, suivant la droite PP' des pivots.

Remarquons d'abord que ce théorème est fondamental dans l'ouvrage de M. Poncelet, en ce sens qu'il sert de base

aux belles propositions de l'auteur sur l'enveloppe du côté libre d'un polygone inscrit, dont les autres côtés pivotent autour de points donnés, etc., et à son théorème si remarquable sur les polygones à la fois inscrits à une conique et circonscrits à une autre.

Cette observation montre donc qu'il n'est pas inutile de démontrer ce théorème pour tous les cas. Or, la démonstration de ce principe qui se trouve dans l'ouvrage ci-dessus ne s'applique qu'au cas où la droite PP′ des pivots ne couperait pas la conique (C); car, si la droite PP′ coupait la conique (C), on ne pourrait plus projetter la figure de manière que dans la projection la droite PP′ fût emportée à l'infini, et la conique (C) remplacée par un cercle, car la conique de projection serait toujours une hyperbole; mais on pourra toujours, dans ce cas, faire que la droite PP′ étant emportée à l'infini dans la projection, la conique (C) soit projetée suivant une hyperbole équilatère, et l'on aura alors dans la projection un triangle *abc*, inscrit dans une hyperbole équilatère et dont les côtés *ab*, *ac* sont respectivement parallèles à des directions données. Si donc nous prouvons que l'enveloppe du troisième côté *bc* dans la projection est une hyperbole ayant les mêmes asymptotes que la première, comme deux hyperboles ayant mêmes asymptotes (et d'ailleurs conjuguées ou non conjuguées) se projettent toujours suivant deux coniques ayant un double contact réel suivant la droite projection de celle à l'infini du premier plan, le théorème actuel sur l'enveloppe du côté BC dans la figure primitive sera démontré.

Démontrons donc la proposition auxiliaire dont il s'agit :

(*Fig.* 29.) II. *Théorème.* Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole quelconque; les deux côtés AB, AC sont constamment parallèles à des directions données; le troisième

côté BC enveloppera une seconde hyperbole ayant mêmes asymptôtes que la première.

Démonstration. Soient $xy=k^2$ l'équation de la courbe; $A(\alpha,\beta)$ un de ses points, dont l'égalité (1) $\alpha\beta=k^2$; m, n les coefficients angulaires respectifs des côtés AB, AC; x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées des deux points B, C, on a :

pour l'équation de AB, $y=mx+\beta-m\alpha$;

d'où $$mx^2+(\beta-m\alpha)x-k^2=0,$$

d'où

$$x=\frac{m\alpha-\beta\pm\sqrt{(m\alpha-\beta)^2+4m\alpha\beta}}{2m}=\frac{m\alpha-\beta\pm(m\alpha+\beta)}{2m},$$

d'où $$B\left[x_1=-\frac{\beta}{m};\ y_1=-m\alpha\right];$$

de même $$C\left[x_2=-\frac{\beta}{n};\ y_2=-n\alpha\right].$$

Soient X, Y les coordonnées du point O milieu de la corde BC, on aura :

$$O\left[X=-\frac{m+n}{2mn}\beta;\ Y=-\frac{m+n}{2}\alpha\right],$$

d'où l'on tire :

$$XY=\frac{(m+n)^2}{4mn}\alpha\beta=\frac{(m+n)^2}{4mn}k^2. \qquad (2)$$

Ce qui montre que le lieu des milieux des côtés BC du triangle ABC est une hyperbole, ayant mêmes asymptotes que la proposée ; ou, ce qui revient au même, que le côté BC est constamment tangent à cette même hyperbole qui contient son milieu ; d'ailleurs, sur la figure comme sur l'équation (2), on peut voir que l'hyperbole enveloppe du côté BC peut être conjuguée ou non conjuguée à l'hyperbole circonscrite au triangle ABC.

Observation I. Le point où le côté BC touche son enveloppe

est constamment en son milieu O ; or ce point O s'obtient en construisant un parallélogramme sur les côtés AB, AC, et menant la diagonale du point A, diagonale qui coupe BC au point cherché. Cette remarque permettra, dans la figure primitive, de déterminer à chaque instant le point où le côté libre du triangle touche son enveloppe. et la construction sera exactement la même que celle qui est employée dans le cas où les hyperboles co-asymptotiques sont remplacées par des cercles concentriques.

Observation II. Ce dernier théorème et l'observation précédente indiquent, comme on le voit, deux nouvelles analogies assez remarquables entre le cercle et l'hyperbole équilatère.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

de l'identité de Waring (Voir t. IV, p. 183).

PAR M. PAUL SERRET.

—

Identité. Soient n quantités quelconques : $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, on a l'identité :

$$\begin{aligned} &a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots\ldots+\\ &+(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1})a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+\\ &+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots\ldots+\\ &+(a_n+a_{n-1}+\ldots\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots\ldots+a_2+a_1). \quad (1) \end{aligned}$$

Démonstration. L'identité est évidente pour le cas de $n=2$; car on a $a_1a_2(a_1+a_2)=a_2a_1(a_2+a_1)$. Donc il suffira de prouver que si l'identité (1) est vraie pour n quantités, elle sera vraie aussi pour $n+1$ quantités ; ou, en d'autres termes, il suffira

de prouver que si l'égalité (1) existe, l'égalité suivante existe aussi :

$$\begin{aligned}
&a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots\ldots+\\
&+(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1})a_n(a_1+\ldots\ldots+a_n)+\\
&+(a_1+\ldots\ldots+a_n)a_{n+1}(a_1+\ldots\ldots+a_{n+1}) = a_{n+1}a_n(a_{n+1}+a_n)+\\
&+(a_{n+1}+a_n)a_{n-1}(a_{n+1}+a_n+a_{n-1})+\ldots\ldots+\\
&+(a_{n+1}+a_n+\ldots+a_2)a_1(a_{n+1}+a_n+\ldots+a_2+a_1). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Désignons respectivement par P et Q le premier et le deuxième membre de l'égalité à démontrer (2).

Or, en ayant égard à l'égalité (1), on peut écrire P ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}= &\overline{a_{n+1}}^2(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+\\
&+a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots\ldots+\\
&+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1).
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous développons de même Q par rapport aux puissances décroissantes de a_{n+1}, nous trouverons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}= &\overline{a_{n+1}}^2(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1)+a_{n+1}[\overline{a_n}^2+a_{n-1}(a_n+a_{n-1})+\\
&+a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots+a_1(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2+a')]+\\
&+a_{n+1}[a_na_{n-1}+a_{n-2}(a_n+a_{n-1})+a_{n-3}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\\
&+\ldots+a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2)]+a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+\\
&+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots+\\
&+(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a').
\end{aligned}$$

Dans P et Q ainsi développées, les parties indépendantes de a_{n+1} sont identiquement égales, ainsi que les parties contenant le carré de a_{n+1} en facteur. Quant aux termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun, il est facile de voir qu'on peut écrire leur ensemble sous cette forme :

$$a_{n+1}[\Sigma\overline{a_n}^2+\Sigma.2a_na_{n-1}] ;$$

$\Sigma\overline{a_n}^2$ représentant la somme des carrés des n quantités $a_1, \ldots\ldots, a_n$, et $\Sigma.2a_na_{n-1}$ représentant la somme des doubles pro-

duits de ces n quantités prises deux à deux. Mais d'après la composition du carré d'un polygone, on a :

$$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1)^2 = \Sigma a_n^2 + \Sigma . 2a_n a_{n-1}.$$

Donc l'ensemble des termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun est identique à l'ensemble des termes de P contenant le même facteur ; et d'ailleurs les autres parties de P et Q étant les mêmes, on a l'identité P=Q, ou l'égalité (2). C. Q. F. D.

Note. Waring parvient à cette identité à l'aide d'une double expression qui donne l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole. Tm.

NOTE

sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} dz}{1+z^n+z^{2n}}$, *$\alpha$ étant* >0 *et* $<2n$,

PAR M. DIENGER,
docteur ès sciences à Sinsheim (Bade).

Si la fonction $\frac{f(x)}{F(x)} = \varphi(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $\varphi(x+iy)$, i étant $=\sqrt{1}$, est 0 pour $x = \pm\infty$, quelle que soit la valeur de y, et cette même quantité est 0 pour $y=\infty$, quelle que soit la valeur de x.

2° Les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ sont absolument les mêmes que celles de l'équation $F(x)=0$; on sait qu'on a alors,

$$\int_{\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 2\pi i \left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{f(x_m)}{F'(x_m)} \right];$$

x_1, x_2, ... x_m étant les racines (imaginaires) de l'équation

$F(x)=0$, pour lesquelles le coefficient de $i(=\sqrt{-1})$ est positif. Si cette équation avait en même temps les racines réelles a_1, a_2, ... il faudrait ajouter à l'expression précédente :

$$\pi i\left[\frac{f(a_1)}{F'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{F'(a_2)}+\ldots\right];$$

$F'(x)$ désignant, comme à l'ordinaire, la fonction dérivée de $F(x)$. (V. les *Leçons de calcul intégral*, par M. Moigno, leç. 9 et 21.)

Appliquons maintenant ce théorème à l'intégrale :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4};$$

supposant $\mu>0$ et <4, toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. Les racines de l'équation $1+x^2+x^4=0$ sont :

$$\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},\quad \cos\frac{4\pi}{3}\pm i\sin\frac{4\pi}{3};$$

donc on a dans ce cas :

$$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\quad x_2=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};$$

d'où il suit, en appliquant le théorème général :

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{\left(-i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3}+\frac{\left(i\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\mu-1}}{-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\right.}\right.$$

$$=\pi i\left[\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\mu-1}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+4}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{-3+i\sqrt{3}}+\frac{\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}}{3+i\sqrt{3}}\right]=$$

$$=\frac{4\pi i^3}{-12}\left[\sqrt{3}.\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-3\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}.\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right].$$

Or on a : $\sqrt{3}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$, donc

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-xi)^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}.\sin\frac{\pi}{6}}\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{6}.\sin\frac{\pi}{6}-\sin(\mu-1)\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-(\mu-1)\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)=$$

$$=[(-i)^{\mu-1}+i^{\mu-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\mu-1}\right]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=\left[\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}-i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}+\cos(\mu-1)\frac{\pi}{2}+i\sin(\mu-1)\frac{\pi}{2}\right]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=$$

$$=2\sin\frac{\mu\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4},$$

d'où enfin

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\mu\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\mu\pi}{2}},\ \mu\begin{matrix}>0\\<4.\end{matrix}\qquad(1)$$

Supposons dans cette formule $\mu=2a$, $x^2=z$, on aura :

$x^{\mu-1}dx=x^{2a-2}xdx=z^{a-1}\dfrac{dz}{2}$, donc

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a\pi}{3}\right)}{\sin a\pi},\ a\begin{matrix}>0\\<2.\end{matrix}$$

Pour $a=1$, le second membre de cette équation se présente

sous la forme $\frac{0}{0}$; sa valeur se trouve, au moyen des formules connues $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z+z^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

ce qu'on peut aisément vérifier par l'intégration directe.

Mettons dans la formule (1) $a=\frac{\alpha}{n}\left(\alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n \end{matrix}\right)$, $z=x^n$, on aura $z^{a-1}dz = nx^{\alpha-1}dx$, donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{n\sqrt{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}, \ \alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n. \end{matrix} \tag{2}$$

Cette formule a lieu pour n entier et >0, et même pour n fractionnaire et >0, pourvu que, dans ce dernier cas, on n'admette pour x^n, x^{2n}, qui sont alors des puissances fractionnaires, que leurs valeurs positives et réelles.

Pour $\alpha=n$, le second membre de l'équation (2) est $\frac{0}{0}$, sa valeur est alors $\frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}$, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \frac{2\pi}{3n\sqrt{3}}.$$

Posons dans la formule (2) $\frac{1}{x}$ au lieu de x, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{a^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$ se transformera en $\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}$; donc on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x^n+x^{2n}}, \ \alpha \begin{matrix} >0 \\ <2n; \end{matrix} \tag{3}$$

équation qui résulte immédiatement de ce qu'on a identiquement :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{\alpha\pi}{n}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{(2n-\alpha)\pi}{3n}\right)}{\sin\frac{(2n-\alpha)\pi}{n}}.$$

Différentions l'équation (2) par rapport à α, nous aurons :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}=$$

$$=\frac{-2\pi^2}{3n^2\sqrt{3}}\cdot\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{n}+3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha\pi}{3n}\right)\cos\frac{\alpha\pi}{n}\right]}{\sin^2\frac{\alpha\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Cette équation aura lieu tant que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ aura tous ses éléments finis, c'est-à-dire tant que la quantité $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouira pour $\varepsilon=0$; x pouvant varier de $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Or il est évident que la quantité $\frac{x^{\alpha-1}\log(x)}{1+x^n+x^{2n}}$ est finie pour $x\begin{smallmatrix}>0\\<\infty\end{smallmatrix}$; donc $\frac{(x+\varepsilon)^{\alpha-1}\log(x+\varepsilon).\varepsilon}{1+(x+\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^{2n}}$ s'évanouit pour $\varepsilon=0$, x étant $\begin{smallmatrix}>0\\<\infty\end{smallmatrix}$. Supposons donc $x=0$, on aura à discuter la quantité :

$$\frac{\varepsilon^{\alpha-1}\log(\varepsilon).\varepsilon}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}}=\frac{\varepsilon^\alpha\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0\,;$$

qui est évidemment 0 tant que $x>0$; pour $\alpha=\infty$, on pourra supposer $x+\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$, et on aura :

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\varepsilon}{1+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}}=\frac{-\varepsilon^{2n-\alpha}\log(\varepsilon)}{1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}} \text{ pour } \varepsilon=0,$$

qui sera 0 pourvu qu'on ait $\alpha<2n$. Il résulte de ces consi-

dérations que la formule (4) a lieu pour $\alpha {> 0 \atop < 2n}$, c'est-à-dire sous les mêmes conditions que l'équation (2) d'où elle dérive.

La formule (3) donne, en différentiant par rapport à α :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}},\ \alpha {> 0 \atop < 2n}. \qquad (5)$$

Pour $n=\alpha$, on tire de l'équation (1) :

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}} = -\infty\,; \qquad (6)$$

donc la formule (5) démontre que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log(x)dx}{1+x^n+x^{2n}}$ change de signe pour $\alpha=n$; elle est négative pour $\alpha {> 0 \atop < n}$, positive pour $\alpha {> n \atop < 2n}$; pour $\alpha=n$, elle passe de l'infini négatif à l'infini positif (*).

EXTENSION DU THÉORÈME 161 (Voir p. 114)

de M. Joachimstal à la parabole.

PAR M. MENTION.

De même que par les deux autres théorèmes de M. Joachimstal, l'énoncé donné n° 161 s'applique à l'hyperbole; mais dans la parabole il n'a plus de sens, tandis que celui qu'on lit à la page 117 du tome VII de ces Annales s'applique parfaitement à cette courbe. Ainsi, le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

(*) On obtiendrait une économie de temps, en publiant un recueil de toutes les intégrales définies connues, de leurs relations et transformations, ainsi que des transcendantes périodiques; le tout rangé suivant un certain ordre. Lequel suivre? TM.

« *La somme des lignes obtenues en projetant les longueurs de deux normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement la parabole, sur les rayons vecteurs de ces points, est égale à la corde focale parallèle à la droite qui les joint.* »

1. Soient (x', y') (x'', y'') les coordonnées des extrémités d'une corde; la longueur de la corde focale, parallèle à cette première, est $x' + x'' + 2p + \frac{y'y''}{p}$ (p est le demi-paramètre). C'est le résultat d'un calcul simple.

La distance du sommet de la parabole à une tangente est $x' \cos i$, x' étant l'abscisse du point de contact, i l'angle de la normale avec le rayon vecteur.

Les coordonnées du point de concours des deux normales aux points $(x'y')$ $(x''y'')$, sont :

$$\alpha = p + x' + x'' + \frac{y'y''}{2p},\ \beta = -\frac{y'y''(y'+y'')}{2p^2}.$$

2. Ce qu'il s'agit de prouver, c'est que :

$$n \cos i + n' \cos i' = x' + x'' + 2p + \frac{y'y''}{p}.$$

Pour cela, prenons encore les *puissances* des points A et A' par rapport au cercle décrit sur la distance du sommet de la parabole au point N de concours des deux normales, comme diamètre.

L'équation de ce cercle est $x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y = 0$; donc les puissances sont

$$x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y',\quad x''^2 - \alpha x'' + y''^2 - \beta y''.$$

Or, il est aisé de voir que chacune de ces puissances représente np_1, $n'p'$, n,n' étant les longueurs AN, A'N, p_1 et p' les distances du sommet aux deux tangentes.

Ainsi

$$np_1 = x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y',\ n'p' = x''^2 - \alpha x'' + y''^2 - \beta y''.$$

Remplaçant p_1 et p' par leurs valeurs $x' \cos i$, $x'' \cos i'$, on aura :

$$n \cos i = x' - \alpha + \frac{y'^2}{x'} - \frac{\beta y'}{x'} = x' - \alpha + 2p - \beta \cdot \frac{2p}{y'},$$

$$n' \cos i' = x'' - \alpha + 2p - \beta \cdot \frac{2p}{y''},$$

en sorte que

$$n \cos i + n' \cos i' = x' + x'' - 2\alpha + 4p - \beta \cdot 2p \frac{y' + y''}{y'y''}.$$

Mettant par α, β les valeurs qui sont écrites plus haut, cette expression devient :

$$x' + x'' - 2p - 2x' - 2x'' - \frac{y'y''}{p} + 4p + \frac{(y'+y'')^2}{p} =$$

$$= 2p + x' + x'' + \frac{y'y''}{p}, \text{ C. Q. F. D.}$$

3. Si la corde devient tangente à la parabole, $n = n' =$ le rayon de courbure.

Et alors $2n \cos i = f$, $n = \frac{f}{2 \cos i}$ (f est la longueur de la corde focale parallèle à la tangente) ou bien comme $\frac{f}{2} = \frac{p}{\cos^2 i}$, $n = \frac{p}{\cos^3 i}$, expression connue de la valeur du rayon de courbure.

Si l'on prend trois points tels que les normales en ces points concourent, la proposition énoncée au haut de la page 118 n'est pas vraie.

On peut d'ailleurs, comme pour l'ellipse, calculer la somme des projections des longueurs normales sur les rayons vecteurs correspondants.

NOTE SUR LES ROSETTES,

PAR M. BRASSINNE,
Professeur à l'école d'artillerie à Toulouse.

J'ai donné, dans un mémoire lu à l'Académie de Toulouse, diverses propositions parmi lesquelles j'ai énoncé un théorème qui n'est qu'une extension facile du théorème de M. Babinet. Je viens de lire dans les comptes rendus de l'Institut que M. Breton [de Champ] (8 mai, p. 494) avait fait des recherches analogues. Je vous prie d'insérer la note suivante, que je vous avais déjà envoyée en décembre 1847.

1° M. Babinet, dans un des derniers numéros des comptes rendus de l'Institut, a énoncé le théorème suivant (27 septembre 1847, p. 441) :

« Si par un point d'une surface courbe quelconque on
» mène une normale, et par cette normale m plans de section,
» faisant des angles dièdres successifs égaux chacun à $\frac{2\pi}{m}$, la
» somme des courbures des sections normales au point
» que l'on considère, élevées chacune à la puissance -1,
» sera égale à une constante multipliée par le nombre m des
» sections. »

On peut donner à ce théorème l'extension suivante : « La
» somme des puissances $-p$ des rayons de courbure des m
» sections, sera encore une constante multipliée par m, si
» $2p < m$; p est entier. »

2° « Si à partir du pied de la normale à la surface, on
» prend sur chaque courbe des sections normales un arc in-

» finiment petit ds, et si par le point extrême de chacun de » ces arcs égaux, on mène une normale à la surface, chaque » normale fera avec la section qui passe par son pied sur la » surface un angle infiniment petit de l'ordre ds; cela posé, » la somme des puissances p de tous ces angles, ou de leurs » sinus, sera une constante multipliée par le nombre des » sections. » (Ce qu'on déduit d'un théorème de M. Bertrand, journal de M. Liouville, t. IX, p. 133, 1844.)

Des théorèmes semblables en grand nombre se rencontrent dans la théorie des sections coniques. Ainsi, par exemple, si par le centre d'une ellipse on mène des rayons quelconques terminés à cette courbe, faisant deux à deux des angles égaux à $\frac{2\pi}{m}$, on trouvera que la somme des puissances $-2p$ de ces rayons vaudra une constante multipliée par leur nombre si $2p < m$.

Si, au lieu des rayons de l'ellipse, on considère la longueur des perpendiculaires, abaissées du centre sur les tangentes et faisant entre elles successivement des angles $\frac{2\pi}{m}$, la somme des puissances $2p$ de ces perpendiculaires vaudra une constante multipliée par m.

De la même manière on verrait que la somme des puissances $-p$ des cordes de l'ellipse menées par un foyer et faisant deux à deux des angles $\frac{2\pi}{m}$, est une constante multipliée par m; $2p < m$.

Un théorème analogue aurait lieu pour une courbe du degré $2m$, dont l'équation devient

$$(x^2+y^2)^m + Ax^{2m-2} + Bx^{2m-4} + \ldots + Sx^2 + U = 0,$$

en menant sous des angles $\frac{2\pi}{m}$ des rayons du centre à la courbe.

Note. Nous dirons derechef (*voir* t. IV, p. 183) qu'il y a quatre-vingt-six ans que Waring a donné la théorie complète des *rosettes*. Voici le titre *in extenso* de son ouvrage : Proprietates algebraicarum curvarum ab Edwardo Waring. M. D. matheseos professore Lucasiano, cantab. reginæ societatis et bononiensis scientiarum academiæ socio, Cantabrigiæ, MDCCLXXII, in-4°, XI, 123, 7 planches. Mais la première édition est de 1762. Ce petit volume renferme les grandes théories, les propriétés générales des courbes algébriques exposées suivant la véritable méthode cartésienne, qui ne consiste que dans l'application des théories équationnelles aux lignes géométriques et ce qui contraste si fortement avec tant de productions modernes, volumineuses minuties dont la grosseur rappelle l'embonpoint fallacieux des hydropiques. Or, après avoir donné la théorie segmentaire des sécantes, celle des diamètres de divers genres avec leurs enveloppes, des centres avec leurs lieux géométriques, la théorie des sous-tangentes, les asymptotes, les moyens si féconds de transformation, etc., Waring pose ce problème ; il est le 15ème. Étant donnée l'équation de degré n d'une courbe, si de l'origine on mène des rayons vecteurs divisant une circonférence décrite de cette origine comme centre en p parties égales, trouver une équation qui ait pour racines les p rayons vecteurs. La solution de ce problème qu'il donne, renferme implicitement toute la théorie des *rosettes*. En effet, toute courbe algébrique a pour équation polaire une expression ordonnée suivant les puissances du rayon vecteur ayant pour coefficients des lignes trigonométriques de l'argument ; pour une valeur donnée de l'argument ω, on trouve la valeur correspondante des fonctions symétriques de ρ en fonction des mêmes lignes trigonométriques, et l'argument croissant en progression arithmétique, comme il arrive dans les rosettes, on sait évaluer la somme de ces progressions. Toutes ces évaluations, traduites en géométrie,

fournissent avec une extrême facilité des théorèmes en nombre infini comme les fonctions symétriques ; c'est un océan sans bords (*). Voici les propres paroles de Waring. On sait qu'il a fondé la théorie des fonctions symétriques dans son ouvrage intitulé : *Meditationes algebraicæ*, ayant indiqué diverses applications du problème XV, il ajoute : *facile deduci possint proprietates curvarum quæ correspondent singulis propositionibus in nostr. inedit. algeb. contentis. analytica cum problema facile in geometrica transformari possint et vice versa* (p. 57). Naguère M. Babinet a annoncé à l'Académie un théorème de *rosettes* sur les rayons de courbure des sections normales à une surface, et séance tenante M. Duhamel en a donné la démonstration. En effet, les théorèmes découverts par Euler sur ces rayons de courbure, sont graphiquement représentés dans les *indicatrices* de M. Dupin ; dès lors on n'a plus affaire qu'à des rosettes formées par des demi-diamètres dans une conique.

Le reste de l'ouvrage de Waring est consacré aux propriétés des épicycloïdes, à la manière de trouver des rectifications, des rayons de courbure, etc. ; des propriétés des surfaces, des courbes à double courbure, des polygones inscrits et circonscrits jouissant de quelque propriété maximum et minimum. Le théorème XX (p. 105), si je l'ai bien compris, est faux ; il vient à dire que deux polygones *réguliers* d'un même nombre de côtés inscrits dans une ellipse, ont le même *périmètre*. Cette égalité ne subsiste que pour les aires.

On trouve, p. 118, l'énoncé d'un curieux théorème sur l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole conique, et qui montre que l'illustre analyste possédait la formule qui

(*) M. Chasles vient d'insérer dans les Comptes rendus (22 mai, p. 531) une foule de propriétés de rosettes.

exprime l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées, des sommets. Voici le théorème, et pour fixer les idées, nous prendrons le pentagone ABCDE inscrit dans une parabole d'Apollonius ; projetons les sommets orthogonalement sur une droite perpendiculaire à l'axe, en a, b, c, d, e ; alors l'aire du polygone, multipliée par le double du paramètre principal, est égale à

$$ab.bc.ac + ac.cd.ad + ad.de.ae,$$

ou bien aussi en commençant par l'autre bout :

$$ed.dc.ec + ec.cb.eb + eb.ba.ea;$$

c'est l'identité que M. P. Serret a démontrée analytiquement (p. 199).

Revenons aux *rosettes*. M. E.-F. Auguste, directeur d'un gymnase à Berlin, est auteur de ce théorème : *Dans le plan d'un cercle, on forme une rosette de* $4n+2$ *rayons terminés à la circonférence, la somme des rayons de rang pair est égale à la somme des rayons de rang impair, quel que soit le rayon qu'on prenne pour le premier.* (Crelle, p. 387, 1837.)

En établissant une autre loi d'accroissement pour l'*argument* que la progression arithmétique, on obtient d'autres théorèmes. Le plus célèbre théorème de ce genre, aussi le premier en date et toujours le plus utile, est celui de Côtes, généralisé par Moivre.

Ayant communiqué dernièrement le théorème de M. Auguste à M. Breton (de Champ), l'excellent géomètre l'a ainsi généralisé :

« *Si dans le plan d'un cercle on construit une rosette de*
» $4n+2$ *rayons terminés à la circonférence, la somme des*
» *rayons impairs élevés à la puissance entière quelconque* p, *est*
» *égale à la somme des rayons pairs élevés à la même puissance*,
» *tant que l'on a* $p < 4n+2$, p *étant impair.*

» Et plus généralement, pour une rosette de $2n$ rayons : *la*

» *somme des puissances* p *de ces rayons est constante lorsque cette* » *rosette tourne autour de son centre, tant que l'on a* $p < 2n$; » *cette somme est nulle quand* p *est impair.* (Le mot somme est » pris ici dans le sens algébrique.)

» Cela tient à ce que l'équation du cercle exprime x^2+y^2 » en fonction d'un trinôme de premier degré en x, y; il est » bien entendu que le théorème de Moivre est l'instrument de » démonstration.

» Si l'on prend une courbe dont l'équation soit de cette » forme :

$$(x^2+y^2)^m + u_{2m-1} + u_{2m-2} + \ldots u_2 + u_1 + u_0 = 0;$$

» u_i étant un polynôme quelconque entier, rationnel et homo- » gène de degré i en x, y, on a les mêmes propriétés que pour » le cercle, à cette seule différence près que le degré des fonc- » tions qui demeurent constantes comporte d'autres limites. » La lemniscate, dans laquelle le produit des distances de son » point à deux points fixes est constant, a précisément une » équation de cette forme et se prête à des énoncés où la limite » de p n'est que la moitié de celle du cercle. »

THÉORÈMES NOUVEAUX.

Sur le quadrilatère et le pentagone inscrits à une conique.

PAR M. PAUL SERRET.

—

Théorème I. Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique. Avec ses quatre sommets pris trois à trois, on peut former quatre triangles. Soit ABC l'un de ces triangles; du sommet restant D menons trois droites conjuguées aux trois côtés du triangle; elles les rencontrent en trois points M, N, P situés sur une même droite L. Faisant la même con-

struction pour chacun des trois autres systèmes formés d'un triangle et d'un point, nous aurons en tout quatre droites telles que L, or ces quatre droites se coupent au même point P.

Théorème II. Soit ABCDE un pentagone inscrit à une conique; avec les cinq sommets pris quatre à quatre, on peut former cinq quadrilatères inscrits; dans chacun d'eux on construit le point P du théorème précédent, ce qui donne cinq points P; ces cinq points P sont situés sur une même conique semblable à la première et semblablement placée, le rapport de similitude de la 1re à la 2e étant celui de 2 à 1.

Démonstration du Théorème I.

I. LEMME I. — *Théorème.* Pour abréger le discours, nous appellerons *point de rencontre*, dans un triangle inscrit à une conique, le point commun d'intersection des trois droites qui, partant des sommets, sont conjuguées respectivement aux côtés opposés. — Soit ABC un triangle inscrit à une conique, O un point quelconque de la conique, et H le *point de rencontre* (par rapport à la conique); par O menons aux trois côtés du triangle, des droites conjuguées les rencontrant en trois points situés sur une droite L; joignons OH; la droite L passera toujours par le milieu de OH.

Démonstration. La marche que je vais suivre permettra de démontrer à la fois, par un même calcul, et le lemme actuel, et le théorème déjà démontré (V. *Annales*, II, 268) que les trois points de rencontre des droites conjuguées passant par O avec les côtés du triangle inscrit, sont trois points situés en ligne droite.

Problème (*fig.* 43). Par deux des sommets B, A d'un triangle ABC, on mène aux côtés opposés AC, BC, sous des directions données m, n, deux droites qui se coupent en H; trouver sur le plan du triangle le lieu des points O tel qu'en menant

par ce point, sous les mêmes directions m, n, des droites OA', OB', aux côtés AC, BC, et joignant A'B', cette dernière droite passe par le milieu de OH.

Solution. Soit O $(\alpha, 6)$ un des points du lieu cherché; $CA = a$, $CB = b$; CA, CB étant pris pour axes des x et des y. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; les coordonnées des deux points H et M milieu de OH; on aura :

$$H\left[x_1 = \frac{an+b}{n-m}, \quad y_1 = \frac{n(am+b)}{n-m},\right.$$

$$M\left\{x_2 = \frac{(n-m)\alpha+an+b}{2(n-m)}, \quad y_2 = \frac{(n-m)6+n(am+b)}{2(n-m)}\right\}.$$

On trouve d'ailleurs pour l'équation de A'B' :

$$\{A'B'\} \quad (1) \quad (m\alpha-6)y+m(6-n\alpha).x=(m\alpha-6)(6-n\alpha).$$

Exprimant que les coordonnées du point M satisfont à l'équation (1), nous arriverons, en simplifiant et en divisant tout par le facteur $n-m$, à cette équation du lieu cherché :

$$(2) \qquad y^2-2n.xy+mn.x^2-by-ax=0;$$

donc le lieu cherché est une conique circonscrite au triangle ABC.

Or, je dis de plus que les droites OA', OB', dont les directions respectives sont m et n, sont respectivement conjuguées aux côtés AC, BC par rapport à la conique (α), lieu des points O.

On a en effet, entre les directions de deux droites conjuguées par rapport à une conique $Ay^2+\ldots.+F=0$, la relation (t. I, p. 495) :

$$2Apq+B(p+q)+2C=0;$$

d'où
$$q\{2Ap+B\}=-\{2C+Bp\};$$

d'où
$$q=-\frac{Bp+2C}{2Ap+B}.$$

Faisant dans cette formule $p=0$ pour avoir la direction de la droite conjuguée à l'axe des x, ou à CA, nous trouvons :

$$q=-\frac{2C}{B}=-\frac{2mn}{-2n}=m.$$

Faisant $p=\infty$ pour avoir la direction de la droite conjuguée à CB axe des y, nous trouvons :

$$q=-\frac{B}{2A}=\frac{2n}{2}=n.$$

Nous avons donc ce théorème :

Théorème. Si, par un point O quelconque d'une conique circonscrite à un triangle ABC, on mène deux droites OA', OB' conjuguées à deux des côtés AC, BC de ce triangle, qu'on joigne A'B' ; cette droite passera constamment par le milieu de OH, H étant le *point de rencontre.*

Corollaire. Abaissons aussi OC' conjuguée au troisième côté AB. On verrait de même que la droite A'C' doit passer par le milieu M de OH {car CH sera conjuguée à AB}. Donc le point C' se trouve sur la droite A'M, comme le point B'. Donc les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

C'est le théorème t. II, p. 268 ; et le lemme I se trouve démontré.

Observation. Le théorème qui fait l'objet du lemme I est compris *implicitement*, et pour le cas particulier du cercle seulement, dans l'énoncé d'un théorème de M. Steiner sur le quadrilatère (Gergonne, XIX, 38, 1828).

2. Lemme II. Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique ; les quatre sommets pris trois à trois donnent quatre triangles ABC, ABD, ACD, BCD. Soient D', C', B', A' ces quatre *points de rencontre.* Les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont égaux et ont leurs côtés homologues parallèles.

Démonstration. Celle de M. Mention, t. IV, p. 654, pour le

cas particulier du cercle, s'applique sans aucune modification au cas général.

3. Venons maintenant à la démonstration du théorème I.

Soient Ld, Lc, Lb, La les droites L relatives aux systèmes suivants formés d'un triangle et d'un point : ABC, D; ABD, C; ACD, B; BCD, A.

D'après le lemme I, la droite Ld passe par le milieu de DD'.

Id.	Lc	*id.*	CC'.
Id.	Lb	*id.*	BB'.
Id.	La	*id.*	AA'.

Mais, d'après le lemme II, les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' ont leurs côtés homologues AB, A'B', BC, B'C'... égaux et parallèles, *et d'ailleurs de sens contraire*; donc, à cause des propriétés connues du parallélogramme, les quatre droites DD', CC', BB', AA' se coupent deux à deux en leur milieu en un même point P; donc les quatre droites La, Lb, Lc, Ld passent par le même point. C. q. f. d.

Observation I. Ce point P est le centre de similitude inverse des deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D'.

Observation II. Il est toutefois important de remarquer que les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' seront inversement situés ; et pour cela il suffira de s'assurer que leurs côtés homologues AB, A'B', par exemple, sont de sens contraire ; ce que l'on pourra faire par des considérations géométriques très-simples.

Démonstration du Théorème II.

4. Considérons les deux quadrilatères dont les sommets sont :

A, B, C ; D ; et A, B, C ; E.

Soient, pour chacun de ces quadrilatères, ε et δ les points P du théorème précédent ; et soit H le point de rencontre des

trois droites conjuguées aux trois côtés du triangle ABC ; d'après le théorème I déjà démontré, le point ε sera au milieu de DH ; le point δ au milieu de DH ; donc, enfin, la droite $\varepsilon\delta$ est parallèle à DE et égale à $\frac{1}{2}$ DE.

Soient de même γ, β, α les trois autres points P relatifs aux autres quadrilatères formés avec les sommets du pentagone inscrit ; on verra de même que :

$\delta\gamma$ est parallèle	à DC	et égal à	$\frac{1}{2}$ DC ;
$\gamma\beta$ id.	à CB	id.	$\frac{1}{2}$ CB ;
$\beta\alpha$ id.	à BA	id.	$\frac{1}{2}$ BA ;
$\alpha\varepsilon$ id.	à AC	id.	$\frac{1}{2}$ AC.

Donc, enfin, le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ formé avec les cinq points P des cinq quadrilatères sera semblable au polygone ABCDE ; ces deux polygones ayant de plus leurs côtés homologues parallèles, et le rapport linéaire de similitude de $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ à ABCDE étant celui de 1 à 2. Donc ce pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ pourra être inscrit dans une conique semblable à la conique circonscrite à ABCDE et semblablement placée ; le rapport de similitude de cette dernière à la première étant celui de 2 à 1. C. q. f. d.

5. *Théorème III.* Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique. Construisons le quadrilatère A'B'C'D' du lemme II ; il sera inscriptible, comme le premier, dans une conique homothétique. Des points A et A' abaissons respectivement des droites conjuguées aux côtés des deux triangles correspondants BCD et B'C'D'. Les six points d'intersection de chaque côté avec la droite conjuguée correspondante sont six points en ligne droite.

QUESTION IV (*bis*).

Quel est le plus grand angle que l'on puisse inscrire dans un segment donné d'une courbe du second degré? (T. I, p. 123.)

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Solution. Sur la corde AB (*) du segment décrivons une circonférence qui touche la courbe en M, il est visible que l'angle AMB est l'angle cherché. Car tous les angles inscrits dans chacun des segments de cercle séparés par cette corde sont égaux entre eux, et tout angle ayant son sommet intérieurement ou extérieurement est plus grand ou moindre. D'ailleurs tous les points du segment de courbe donné sont à la fois intérieurs ou extérieurs au segment correspondant de la circonférence tangente, attendu que le nombre des points communs aux deux courbes ne peut excéder quatre, y compris A et B. Or quand un arc de cercle tangent à une conique passe de l'intérieur à l'extérieur de celle-ci, il y a osculation, ce qui équivaut à trois points communs; donc l'osculation ne peut exister qu'en A ou en B; donc, ce cas excepté, l'angle AMB est *maximum* ou *minimum*.

Construction. Pour déterminer le point M, je rappellerai que *les diverses cordes d'intersection d'une conique avec les circonférences qui la touchent en un même point sont parallèles entre elles* (**); de plus, on aperçoit sans peine que la direction de la tangente commune et celle des cordes d'intersection

(*) Le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure.

(**) Voir la démonstration de cette propriété, t. II, p. 75 et suiv.

sont symétriques l'une de l'autre relativement aux axes principaux. Donc, *si des points de la courbe donnée où la tangente est parallèle à* AB, *on abaisse des perpendiculaires sur ces axes et qu'on les prolonge d'une longueur égale à elles-mêmes, les points ainsi obtenus seront les sommets des angles maximum ou minimum.*

Discussion. Les sommets ainsi déterminés seront donc les mêmes pour tous les segments formés par des cordes parallèles entre elles, il n'y a plus qu'à distinguer les cas de maximum et de minimum.

Parabole. Il n'y a évidemment qu'un seul sommet d'angle maximum ou minimum. Quand ce sommet tombe dans le segment donné, l'arc de courbe est renfermé tout entier dans le segment correspondant du cercle tangent; l'angle obtenu est donc un *minimum*. Il est au contraire un *maximum* quand ce sommet tombe hors du segment donné, car les branches de la parabole sont nécessairement extérieurs au cercle tangent.

Hyperbole. Les sommets obtenus sont toujours sur des branches différentes.

Pour la branche à laquelle appartient le segment, même conclusion que pour la parabole. Pour l'autre branche, l'angle obtenu est toujours un *maximum*.

A peine est-il besoin de faire observer que la construction ci-dessus est impossible, si les extrémités de la corde qui ferme le segment ne sont pas toutes deux sur la même branche.

Ellipse. Considérons d'abord le cas où le segment donné est une demi-ellipse terminée à un diamètre quelconque. Si le sommet que l'on considère tombe dans celui des angles formés par des diamètres conjugués égaux qui renferme le petit axe, l'angle est un *maximum*; c'est ce qu'on vérifie sans difficulté.

Si le sommet tombe dans l'angle des diamètres conjugués

égaux qui renferme le grand axe, l'angle est un *minimum*.

Considérons présentement les cordes parallèles au diamètre choisi; les conclusions ci-dessus subsisteront encore pour toutes les cordes comprises entre les deux sommets. Et si l'on suppose qu'une corde se meuve parallèlement à elle-même et que l'un des sommets passe d'un côté à l'autre de cette corde, l'angle correspondant de *maximum* deviendra *minimum*, et réciproquement.

Remarque. Il suit de là que dans le cas où un segment d'ellipse renferme à la fois deux sommets, l'un donne un angle *maximum* et le second un angle *minimum*, ce qui s'accorde avec ce principe général que dans toute fonction continue le *maximum* et le *minimum* se succèdent alternativement.

THÉORÈME DE STATIQUE DE MINDING

sur le plan central et l'axe central. (V. p. 183.)

PAR M. DELADERRERE,
Professeur.

Lemme. Étant donné un système de forces parallèles P, P' appliquées en différents points invariablement liés entre eux, on les décompose chacune en trois autres X, X',... Y, Y',... Z, Z',... parallèles à trois directions fixes, en conservant les mêmes points d'application A, A',... et l'on obtient ainsi trois nouveaux systèmes de forces parallèles, ayant chacun même centre de forces parallèles que le système proposé; car si l'on considère, par exemple, le système des forces X, X',... on voit que les forces X, X'... qui le composent

sont proportionnelles aux forces P, P',... puisque d'après la construction employée pour effectuer la décomposition, les triangles PAX, P'A'X' sont semblables; et l'on sait que lorsque des forces parallèles tournent autour de leur point d'application en restant parallèles et conservent des valeurs proportionnelles à leurs valeurs primitives, le centre du système ne change pas.

Théorème I. Un système de forces P, P'... quelconques appliquées en différents points A, A',... liés entre eux d'une manière invariable, étant donné, on décompose chaque force en son point d'application en trois autres forces respectivement parallèles à trois directions fixes, ce qui donne trois systèmes X, X'.... Y, Y',... Z, Z'... de forces parallèles, ayant chacun un centre de forces parallèles; quelles que soient les directions, les trois centres G, G', G'' sont dans un plan invariable, auquel on donne le nom de *plan central.*

Démonstration. Effectuons une première décomposition du système, et menons le plan des trois centres G, G', G''.

Remarquons ensuite que pour effectuer, suivant d'autres axes, une deuxième décomposition des forces, il suffit pour chaque force P de décomposer ses trois composantes X, Y, Z, chacune selon les trois nouvelles directions, ce qui donnera neuf systèmes de forces parallèles. Soient A_1, A_2, A_3 les composantes de X; B_1, B_2, B_3 celles de Y; C_1, C_2, C_3 celles de Z; A'_1, A'_2, A'_3 celles de X', et ainsi de suite; les systèmes A_1, B_1, C_1 auront même centre G que le système X d'après le lemme; de même les systèmes A_2, B_2, C_2 auront même centre G' que le système Y, et enfin les systèmes A_3, B_3, C_3 auront même centre G'' que le système Z; donc les centres de tous les systèmes seront dans le plan G G' G''. Mais puisque les centres des trois systèmes A_1, B_1, C_1, qui sont parallèles, sont dans le plan G G' G'', il en sera de même du centre G_1 du système composé de ces trois

systèmes, lequel est le centre du système X_1. D'après les principes connus sur la composition et décomposition des forces, on prouverait de la même manière que les centres G'_1, G''_1 des systèmes Y_1 et Z_1 sont dans le plan $GG'G''$; donc, etc.

Théorème II. On fait la décomposition indiquée (théorème I) de façon que l'une des forces soit perpendiculaire au plan central, et que les deux autres X et Y lui soient parallèles; de quelque manière que se fasse la décomposition, les centres G, G' des systèmes X, Y sont toujours sur une même ligne droite, située dans le plan central et appelée *ligne centrale.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on pourra effectuer la décomposition des forces P en X, Y, Z, en les décomposant d'abord chacune en deux forces, dont l'une, qui sera invariable dans tous les systèmes de décomposition, sera Z, et l'autre Q sera dirigée selon l'intersection du plan ZAQ avec un plan mené par le point A, parallèlement au plan central, puis en décomposant chaque force Q en deux autres X, Y, parallèles au plan central.

Maintenant les systèmes X et Y auront leurs centres G et G' dans le plan central; menons la droite G G'; pour effectuer une nouvelle décomposition des forces Q... selon deux nouvelles directions, il suffit de décomposer leurs composantes X et Y selon les deux nouvelles directions, on aura ainsi quatre systèmes de forces parallèles qui seront parallèles deux à deux, et par un raisonnement en tout semblable à celui dont on a fait usage ci-dessus, on prouvera que les centres des deux nouveaux systèmes sont sur la droite G G'.

Remarque. Ce théorème est vrai quand même la composante non parallèle au plan central ne lui est pas perpendiculaire; il suffit qu'elle soit parallèle à une direction fixe,

seulement on n'a plus la ligne centrale pour la ligne contenant les centres.

Observations. Si les trois centres conjugués G, G′, G″ sont sur une même droite, ils restent toujours sur cette droite quels que soient les axes, et la position du plan central est indéterminée.

Si les trois centres se confondent en un point, la coïncidence en ce point aura lieu pour tous les axes.

Dans tout ce qui précède, on suppose que le système n'est pas en équilibre et ne se réduit pas à un couple.

REMARQUE SUR LA QUESTION 161.

(*Théorème Joachimsthal*, p. 114.)

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

Dans les équations $np+n'p'=2d^2$ et $np+n'p'+n''p''+$ $+n'''p'''=$ const. $=2(a^2+b^2)$ relatives à l'ellipse a^2y^2+ $+b^2x^2=a^2b^2$, on reconnaît de suite que les facteurs n, n' pouvant devenir aussi grands qu'on voudra, du moins pour la première équation, les produits np, $n'p'$, $n''p''$, $n'''p'''$ ne sont pas essentiellement positifs. Cela tient à ce que p, qui n'est autre chose que la projection du rayon central AO sur la normale AN, peut tomber sur AN ou sur son prolongement; de là une discussion nécessaire pour déterminer les signes.

Pour plus de généralité, prenons la surface à centre $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$. Le plan tangent en A (x, y, z) ayant pour

équation, en représentant par X, Y, Z les coordonnées courantes $\frac{Xx}{a}+\frac{Yy}{b}+\frac{Zz}{c}=1$, il en résultera :

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right\}}}.$$

De même, la normale en A, ayant pour équation

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c}}.$$

Si l'on représente par α, β, γ les coordonnées d'un point N de la normale en A, en posant de plus $AN=n$, on aura :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=n^2;$$

et par conséquent,

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}}=\frac{y-\beta}{\frac{y}{b}}=\frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}}=\frac{\pm n}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}}}=\pm np=u;$$

de là encore :

$$\frac{x}{a}=\frac{\alpha}{a-u},\quad \frac{y}{b}=\frac{\beta}{b-x},\quad \frac{z}{c}=\frac{\gamma}{c-u};$$

ce qui change l'équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

en

$$\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2}+\frac{b\beta^2}{(b-u)^2}+\frac{c\gamma^2}{(c-u)^2}=1; \qquad (a)$$

ou bien encore :

$$u^6-2(a+b+c)u^5+\dots+a^2b^2c^2\left\{1-\frac{\alpha^2}{a}-\frac{\beta^2}{b}-\frac{\gamma^2}{c}\right\}=0.$$

Donc

1° La somme des u ou $\pm np$ est constante.

2° Le produit des u reste le même tant que le point N se trouve sur une surface $\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}=\mathrm{K}$ concentrique et semblable à la surface donnée.

On demande une discussion complète de l'équation (a).

En rapportant la conique à centre à deux axes obliques tangents à la courbe aux points A et A', on trouve très-simplement $np \pm n'p' = 2b^2$. Le signe est mis en évidence. Comme b^2 est $<$ ou $= a^2$, puisque np peut surpasser $2a^2$, il faut bien que le terme $n'p'$ puisse devenir négatif. Le signe — se présente quand N est hors de l'ellipse. Même démonstration pour l'hyperbole.

LIEU GÉOMÉTRIQUE.

Question proposée comme sujet de composition pour l'École polytechnique en 1847 (V. t. VI, p. 327),

PAR M. LE GALLAIS,
élève du collége de La Flèche.

—

1° (*fig.* 34) Du sommet A de l'angle droit BAC on mène une droite quelconque ; des points B et C on abaisse les perpendiculaires BP, CQ, trouver le lieu des points M de ces droites pour lesquels :

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}}.$$

En employant les coordonnées polaires, la solution de ce problème est d'une extrême simplicité. Prenons $\overline{\mathrm{AC}}$ pour axe polaire ; la droite, menée à volonté par le point A, est déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec $\overline{\mathrm{AC}}$, et les points B et C par leurs distances a et b au point A dans des directions

fixes ; le point M aura pour coordonnées l'angle θ et la longueur variable ρ correspondante. Cela posé, on veut avoir

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}.\overline{AQ};$$

or $$\overline{AP} = a \sin\theta,\ \overline{AQ} = b\cos\theta.$$

L'équation du lieu demandé est donc

$$\rho^2 = ab \sin\theta \cos\theta.$$

La discussion de cette équation est facile. D'abord on voit que $\sin\theta\cos\theta$ doit être positif ; donc la courbe n'existe que dans les intervalles où le sinus et le cosinus de θ sont de même signe, c'est-à-dire dans l'angle droit BAC et dans son opposé par le sommet, et nullement dans les angles $\widehat{BAC'}$ et $\widehat{CAB'}$; outre que cela est d'accord avec l'énoncé même, la seule inspection de la figure rend cette conclusion évidente. En second lieu, la forme même de l'équation montre que toute valeur positive de ρ correspond à une valeur négative parfaitement égale et située sur le prolongement, d'où il suit que le point A est un centre de figure et de symétrie, de sorte que la connaissance de la branche comprise dans l'angle BAC suffira pour que la courbe soit complétement explorée ; cette branche elle-même étant symétrique par rapport à la bissectrice, puisqu'à chaque couple ($\sin\theta$, $\cos\theta$) correspond le couple équivalent ($\cos\theta'$, $\cos\theta'$), θ étant $<\frac{\pi}{4}$, et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{4}$. Faisons donc croître θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$, alors 2θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et par conséquent $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$, croît de 0 à $\frac{1}{2}$, et croît par degrés continus. La courbe passe donc par le point A, est continue et s'éloigne de plus en plus du point A jusqu'à ce qu'elle rencontre la bissectrice en D.

D'après ce qui précède, sa forme est donc maintenant complétement déterminée ; pour achever de dissiper toute incertitude, il suffit de chercher la direction de la tangente en quelques points. En appelant α l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur, on sait qu'elle est déterminée par la formule $\tang \alpha = \frac{\rho}{\rho'}$, ρ' étant la dérivée de ρ ; or la dérivée de $\sin 2\theta$ est $2\cos 2\theta$, donc on a à la fois $\rho' = \frac{ab}{2} \sin 2\theta$, $2\rho' = ab \cos 2\theta$, ou $\frac{\rho}{\rho'} = \tang 2\theta$; ainsi $\tang \alpha = \tang 2\theta$. On trouve ainsi le tableau suivant :

$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$,
$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = 0$.

La courbe est donc tangente en deux côtés de l'angle BAC, et en D à une perpendiculaire à la bissectrice.

Note. C'est une lemniscate de Bernoulli ; l'équation de l'hyperbole étant $2xy - ab = 0$. (V. t. IV, p. 427.) Tm.

AIRE

du quadrilatère circonscriptible.

PAR M. J.-G. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Dans tout quadrilatère circonscriptible, les côtés forment la relation

$$a + c = b + d,$$

de laquelle on déduit

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2bd - 2ac.$$

Substituant cette valeur dans la formule de l'aire d'un quadrilatère quelconque (*), et faisant sortir le facteur 4 de dessous le radical, on obtient :

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{(mn+ac-bd)(mn-ac+bd)},$$

pour l'expression de l'aire d'un quadrilatère circonscriptible.

Soient a', a''; b', b''; c', c''; d', d'' les segments des côtés respectifs formés par les points de contact, de sorte que

$$a''=b',\ b''=c',\ c''=d',\ d''=a',$$

et

$$ac-bd=(a'+a'')(c'+c'')-(b'+b'')(d'+d'').$$

Développant le second membre, et observant que les égalités précédentes donnent :

$$a''c'=b'd',\ b''d''=a'c',$$

et

$$a''c'=b'b'',\ a'c''=d'd'',\ b'd''=a'a'',\ d'b''=c'c'',$$

on trouve, en substituant et en réduisant :

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{(mn+a'a''-b'b''+c'c''-d'd'')(mn-a'a''+b'b''-c'c''+d'd'')}.$$

Lorsque le quadrilatère circonscriptible est en même temps inscriptible, on a le produit des diagonales $mn=ac+bd$, et, par suite,

$$Q=\sqrt{abcd},$$

pour l'aire d'un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible, dont a, b, c, d sont les quatre côtés.

(*) Voir Nouv. Annales des Mathém., t. VII, p. 69.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

du problème sur l'axe radical (Q. 67, t. II, p. 327).

PAR M. A. MANNHEIM,
élève du lycée Charlemagne (classe de M. Catalan).

—

Étant données deux circonférences dans le même plan, A un point sur la première circonférence, et B un point sur la seconde; trouver sur l'axe radical des deux circonférences un point C, tel qu'en menant les sécantes CA, CB, elles coupent les circonférences en deux points D, E, de manière que la droite DE soit à angle droit sur l'axe radical (*fig.* 30).

Supposons le problème résolu. Soit C le point cherché. G étant le point de rencontre de la droite DE avec l'axe radical, élevons au point A la perpendiculaire AC′ à la sécante CD. Les deux triangles CAC′ et DCG sont semblables, et l'on a $CA \times CD = CG \times CC'$; mais puisque le point C est un point de l'axe radical, l'on a $CA \times CD = CB \times CE$; et $CG \times CC' = CB \times CE$; donc les triangles CBC′ et CGE sont semblables, et la droite BC′ est perpendiculaire à CE. On voit donc que les perpendiculaires AC′ et BC′ aux sécantes CD et CE se coupent sur l'axe radical. Actuellement les points C. A. B. C′ sont sur une même circonférence; car CAC′ = 1$^{d.}$; CBC′ = 1$^{d.}$. Mais cette circonférence passant par les deux points A et B, son centre est situé sur l'axe radical. Elle est donc déterminée, et les points où elle coupe l'axe radical sont les points cherchés. La circonférence ayant son centre sur l'axe radical, le problème admet deux solutions. Si les points donnés

A et B sont sur une perpendiculaire à l'axe radical, l'un des points est à l'infini, et l'autre est le point où AB rencontre l'axe radical. C'est ce qu'indique la construction.

THÉORÈME

sur les axes de l'ellipse et de l'hyperbole.

PAR M. A. MANNHEIM,
élève du lycée Charlemagne (classe de M. Catalan).

—

La circonférence décrite sur la portion du petit axe comprise entre la normale et la tangente menées en un point d'une ellipse passe par les foyers. Le théorème subsiste pour l'hyperbole.

Démonstration facile.

FORMULES DE DELAMBRE

et analogies de Néper, déduites immédiatement des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, d'après M. Crelle. (Crelle, XII, 348, 1834, en français.)

—

1. Équations fondamentales :

$$\cos B\cos C = \cos a\sin B\sin C - \cos A \quad (1)$$

$$\cos b\cos c = \cos a - \cos A\sin b\sin c \quad (2)$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (3)$$

L'équation (3) donne :

$$\sin B\sin C(1+\cos a)(1-\cos a) = \sin b\sin c(1+\cos A)(1-\cos A) \ldots (4)$$

de là, on déduit :

$$[1-\cos A+\sin B\sin C(1+\cos a)](1-\cos a)=$$
$$=[1-\cos a+\sin b\sin c(1+\cos A)](1-\cos A),$$

ou bien, en vertu de l'équation (1),

$$[1+\cos(B-C)](1-\cos a)=[1-\cos(b+c)](1-\cos a)$$

$$4\cos^2\frac{1}{2}(B-C)\sin^2\frac{1}{2}a=4\sin^2\frac{1}{2}(b+c)\sin^2\frac{1}{2}A$$

$$\pm\cos\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}a=\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A. \quad (5)$$

C'est la première équation de Delambre.

L'équation (4) donne encore

$$[1+\cos A+\sin B\sin C(1-\cos a)](1+\cos a)=$$
$$=[1+\cos a+\sin b\sin c(1-\cos A)](1+\cos A);$$

on en déduit, combinée avec l'équation (1),

$$\pm\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A, \quad (6)$$

seconde équation de Delambre, et les deux autres sont

$$\pm\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}a=\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A \quad (7)$$

$$\pm\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A. \quad (8)$$

(7) et (8) se déduisent de

$$[1+\cos A-\sin B\sin C(1+\cos a)](1-\cos a)=$$
$$=[1-\cos a-\sin b\sin c(1-\cos A)](1+\cos A)$$
$$[1-\cos A-\sin B\sin C(1-\cos a)](1+\cos a)=$$
$$=[1+\cos a-\sin b\sin c(1+\cos A)](1-\cos A).$$

En divisant (7) par (5), (5) par (8), (7) par (8) et (6) par (8), on obtient les analogies de Néper.

Observation. Les formules 5, 6, 7, 8 portent le nom de Gauss en Allemagne, mais elles ont été données par Delambre, dans la *Connaissance des temps*, 1809, publiée en 1807.

QUESTION D'EXAMEN (Tome VI, page 328).

PAR M. LEGALLAIS,
élève du collége militaire de La Flèche.

Trouver le lieu des projections d'un sommet d'une section conique sur toutes ses tangentes.

L'équation $y^2 = 2px + nx^2$ représente l'une quelconque des trois sections coniques rapportée à l'axe focal et à l'un des sommets situés sur cet axe.

Soit (x', y') un point quelconque de la courbe; posons l'équation de la tangente en ce point, celle de la perpendiculaire menée à cette tangente par l'origine, et la condition qui exprime que le point (x', y') est sur la courbe, j'aurai trois relations :

$$y'^2 = 2px' + nx'^2 \qquad (1)$$

$$yy' = p(x + x') + nxx' \qquad (2)$$

$$y = -\frac{y'}{p + nx'}x \qquad (3)$$

entre lesquelles il suffit évidemment d'éliminer x' et y' pour avoir l'équation du lieu demandé. Des deux dernières, on tire :

$$x' = -p\frac{x^2 + y^2}{n(x^2 + y^2) + px}, \quad y' = -p.\frac{py}{n(x^2 + y^2) + px};$$

portant ces valeurs dans la relation (1) et opérant toutes les réductions, on trouve définitivement pour équation générale du lieu géométrique cherché :

$$n(x^2 + y^2)^2 + 2px(x^2 + y^2) + p^2y^2 = 0 \text{ (*)}. \qquad (a)$$

(*) Voir t. IV, p. 428.

Il faut maintenant discuter cette équation en donnant successivement à n et à p les valeurs qui conviennent pour les trois courbes.

Pour $n=0$, la discussion est assez simple; mais, dans les autres cas, elle devient plus embarrassante par suite de la complication des termes et des radicaux; c'est pourquoi nous préférons passer à l'équation polaire. En employant les formules de transformation $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, on obtient :

$$n\rho^2+2p\rho\cos\omega+p^2\sin^2\omega=0. \qquad (\beta)$$

Passons à la discussion dans les trois cas :

1° *Parabole.* $n=0$. L'équation (α) donne alors $y^2=-\frac{x^3}{x+\frac{p}{2}}$,

et l'équation (β) $\rho=-\frac{p\sin^2\omega}{2\cos\omega}$. Sous l'une quelconque de ces deux formes, on reconnaît facilement la cissoïde ayant pour sommet et pour axe transverse le sommet et l'axe transverse de la parabole, et pour asymptote la directrice de cette courbe; il est inutile de nous y arrêter. (V. t. IV, p. 431.)

2° *Ellipse.* Supposons d'abord qu'il s'agisse du sommet de gauche A′ (*fig.* 31), alors $n=-\frac{B^2}{A^2}$, $p=\frac{B^2}{A}$, et l'équation (β) devient :

$$\rho^2-2A\rho\cos\omega-B^2\sin^2\omega=0,$$

ou, résolvant :

$$\rho=A\cos\omega\pm\sqrt{B^2+c^2\cos^2\omega}\,;\quad c^2=A^2-B^2.$$

A chaque valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ, parmi lesquelles il y en a toujours une positive et une négative, attendu que $A\cos\omega$ est moindre que le radical

$$\omega=0,\ \rho=A\pm A=2A,\ 0.$$

ω croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le signe + du radical donne les va-

leurs positives de ρ, et ces valeurs vont en décroissant, car $\cos\omega$ décroît; mais tous les points déterminés ainsi sont situés hors de l'ellipse, car à une même valeur de ω correspondent ces deux rayons vecteurs : savoir, pour la courbe actuelle, $\rho' = A\cos\omega + \sqrt{B^2 + c^2\cos^2\omega}$, et, pour l'ellipse, $\rho'' = 2A\cos\omega\frac{B^2}{B^2 + c^2\sin^2\omega}$, et il est facile de voir que $\rho' - \rho''$ est > 0. Le signe — du radical donne les valeurs négatives de ρ, qui vont en croissant quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \pm B$, ce qui donne les deux sommets H et I du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

Il est inutile de pousser plus loin cette première discussion. L'évidente symétrie autour du grand axe de l'ellipse, et l'obligation de passer par les points A et A', indiquent déjà sensiblement la forme représentée dans la figure 31 ; pour plus de détails, passons à la discussion de la tangente. L'angle α qu'elle a fait avec le rayon vecteur, est donnée par la formule $\tang\alpha = \rho\frac{d\omega}{d\rho}$, et, dans une équation quelconque. $F(\omega,\rho) = 0$, $\frac{d\omega}{d\rho} = -\frac{F'(\rho)}{F'(\omega)}$. On a donc ici :

$$\tang\alpha = \frac{A\rho\cos\omega - \rho^2}{A\rho\sin\omega - B^2\sin\omega\cos\omega}.$$

Pour $\omega = 0$, avec $\rho = 2A$, c'est-à-dire pour le point A, $\tang\alpha = \infty$; donc à ce point la tangente est la même que la tangente à l'ellipse. Pour $\omega = 0$, avec $\rho = 0$, on a d'abord $\tang\alpha = \frac{0}{0}$. Afin d'interpréter ce résultat, mettons $\tang\alpha$ sous la forme :

$$\frac{-\sqrt{\frac{B^2}{A^2\cos^2\omega} + \frac{c^2}{A^2}}}{\tang\omega - \frac{B^2\sin^2\omega}{A^2\cos^2\omega + A\sqrt{B^2 + c^2\cos^2\omega}}};$$

on voit que la tangente en A est également la même que la tangente à l'ellipse. Ceci achève de déterminer la forme exacte.

Il est évidemment inutile de recommencer pour un autre sommet de l'ellipse l'examen qui vient d'être fait ; la symétrie montre que pour le point B, par exemple, le lieu aurait la forme de la fig. 32.

3° *Hyperbole* (*fig.* 33). Supposons qu'il s'agisse du sommet de droite Aρ, alors $n=\frac{B^2}{A^2}$, $p=\frac{B^2}{A}$, et l'équation (β) devient

$$\rho^2+2A\rho\cos\omega+B^2\sin^2\omega=0,$$

ou

$$\rho=-A\cos\omega\pm\sqrt{-B^2+c^2\cos^2\omega}.$$

Nous remarquons d'abord une particularité que n'avaient point offert les cas précédents, c'est que ω a des limites ; en effet, pour que le radical soit réel, il faut que $c^2\cos^2\omega$ soit $>B^2$, ou que $\cos\omega$ soit $>\frac{B}{c}$. Ayant mené par le point A les perpendiculaires $\overline{AH}$ et $\overline{AH'}$ sur les asymptotes, et les ayant prolongées indéfiniment en $\overline{IHF}$ et I'H'F', les rayons vecteurs doivent être menés dans l'angle FAF' ou dans l'angle IAI', pour donner des points de la courbe. D'ailleurs, pour $\omega<\frac{\pi}{2}$, il est évident que les deux valeurs de ρ sont négatives.

Nous voyons donc que la courbe est tout entière comprise dans l'intérieur du triangle IAI', ce à quoi on devait s'attendre, d'après les propriétés des asymptotes.

Continuons donc la discussion, en faisant croître ω de H'Ax à π.

La courbe doit passer par les points A, H, H', et être dans l'intérieur de l'angle HAH' ; cela nous porte déjà à croire

que dans cet intervalle elle tourne sa convexité vers AA'.

A chaque valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ, qui sont de même signe, et qui vont, l'une en croissant, l'autre en décroissant, à mesure que ω approche de π.

$\omega = \pi$, $\rho = 2A, 0$, on retrouve les deux sommets A, A'.

$\cos\omega = -\frac{B}{c}$, $\rho = \frac{AB}{c}$; on retrouve les deux points H et H'.

Cherchons la tangente; en répétant les calculs faits ci-dessus, on trouve :

$$\tang\alpha = \frac{\rho^2 + A\rho\cos\omega}{B^2\sin\omega\cos\omega - A\rho\sin\omega}.$$

Par hypothèse, ω est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et ρ est > 0; donc le dénominateur est négatif; le signe de $\tang\alpha$ dépend donc du signe du numérateur. On voit donc que $\tang\alpha$ est > 0 quand ρ est $< A\cos\omega$, et < 0 quand ρ est $> A\cos\omega$. En interprétant ce résultat, on trouve que, dans la partie de la courbe voisine du point A, la convexité est tournée vers AA', et qu'au contraire, dans la partie voisine du point A', c'est la concavité qui est tournée vers cette ligne; et évidemment le changement du sens de courbure a lieu au point H', car c'est là le point de séparation entre les rayons vecteurs par lesquels ρ est $< A\cos\omega$ et ceux pour lesquels ρ est $> A\cos\omega$.

Au point H', il est facile de vérifier que la tangente est AH'; au point A et au point A', la tangente est la même que la tangente à l'hyperbole.

L'ensemble de ces renseignements et la symétrie nécessaire autour de AA' assignent au lieu la forme représentée *fig.* 33.

Note. Pour être complète, cette discussion devrait porter sur les points où les tangentes sont parallèles aux axes principaux, ce qu'on obtient en faisant α égal à ω et à $\frac{\pi}{2} - \omega$; mais la détermination est plus commode en se servant des coor-

données rectangulaires ; dans l'hyperbole, il faut, en outre, fixer les points où la tangente est parallèle aux asymptotes.

Les lignes qu'on obtient en projetant un point fixe sur les tangentes à une conique, sont très-importantes en analyse et en physique, dans la théorie des ondes. Les Allemands désignent ce genre de lignes par un seul mot, qui signifie courbe des *pieds des perpendiculaires*. Ne pourrions-nous pas, pour le même usage, employer l'expression ligne *podaire*, et surface *podaire*, quand il s'agit de la projection d'un point fixe sur les plans tangents d'une surface ? Ainsi on dirait que l'onde lumineuse de Fresnel est la surface polaire réciproque (par rapport à un ellipsoïde) de la surface podaire du centre de cet ellipsoïde ; la *podaire* du sommet d'une parabole est une cissoïde. La podaire du centre d'une hyperbole équilatère est une cassinoïde. La podaire d'un foyer est un cercle dans les coniques à centre et une droite dans la parabole, et en général la ligne ou les surfaces podaires d'un point quelconque, est une ligne ou une surface de quatrième degré où les termes du quatrième degré forment un carré parfait.

QUESTIONS.

—

184. p nombre *premier* impair ; a, b deux nombres *premiers entre eux* ; $a+b$ et $\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$ ne peuvent avoir d'autre facteur commun que p ; si a^p+b^p est divisible par p^q, alors $a+b$ est divisible par p^{q-1} ; mêmes propriétés lorsqu'un des nombres a, b devient négatif. (Kummer.)

185. P étant la limite de la fraction continue :

$$a : a+b : b+c : c+d : d+ \text{etc.},$$

et Q la limite de la fraction continue :

$$a : b + b : c + c : d + \text{etc.},$$

on a $$P(a+Q+1) = a+Q.$$

186. $\frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots \frac{A_n^2}{x-a_n} - B = 0$; $A_1, A_2, \ldots A_n$; $a_1, a_2, \ldots a_n$ et B sont des quantités réelles. Cette équation a toujours n racines réelles.

187. Deux côtés d'un angle droit touchent deux coniques confocales, situées dans le même plan ; le lieu du sommet est un cercle ; la droite qui réunit les deux points de contact a pour enveloppe une conique. (Chasles.)

188. $$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=d^2,$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=d^2.$$

Les axes étant rectangulaires, ces deux équations sont celles de deux ellipsoïdes *égaux*. (Jacobi.)

189. Soient

$t = f(x,y)$; $u = F(x,y)$; d'où $x = \varphi(u,t)$; $y = \psi(u,t)$;

on a

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1.$$

f'_x est la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, et ainsi des autres. (Möbius.)

190. Si l'on substitue dans l'équation polaire d'une droite, r^2 au lieu du rayon vecteur r, et 2ω au lieu de l'angle polaire ω, on obtiendra l'équation d'une hyperbole équilatère. D'une manière analogue, en substituant $\sqrt{-1}\left(\text{tang}\frac{1}{2}r\right)^2$ pour $\text{tang}\frac{1}{2}r$, et 2ω pour ω, dans l'équation polaire sphérique d'un grand cercle, et en changeant les constantes de manière que les imaginaires disparaissent, on tombera sur l'équation d'une hyperbole équilatère sphérique. (Strebor.)

CUBATURE DE QUELQUES CORPS,

PAR M. FINCK,
Professeur à la Faculté des sciences de Strasbourg.

J'ai donné dans ma *Géométrie*, 3ᵉ édit., p. 458, la mesure de l'obélisque, polyèdre qui a pour bases deux polygones ayant les côtés respectivement parallèles et pour faces latérales des trapèzes. La règle établie pour cette mesure convient à une certaine classe de corps ; c'est ce que je vais montrer, tout en donnant pour le cas fondamental une démonstration plus simple que celle qui est insérée dans l'ouvrage cité.

I. *Théorème.* « Si un corps a deux bases planes parallèles » et qu'il se trouve terminé latéralement par une surface » réglée, dont deux directrices sont les contours de ces bases, » ou par une surface du second degré, ce corps a pour » mesure le sixième de sa hauteur, multipliée par la somme » des aires des bases et du quadruple de la section faite à » égales distances des bases. »

Le cas le plus simple est celui de la pyramide, qui rentre dans cette règle, si l'on regarde le sommet comme une base nulle ; car h étant la hauteur, b la base, la section moyenne est $\frac{1}{4}b$; or le volume est $\frac{1}{3}bh = \frac{1}{6}h\left[b + 4\frac{1}{4}b\right]$, ce qui est l'énoncé.

Pour second cas je prendrai le tétraèdre, en considérant deux arêtes opposées comme des bases à aires nulles. Soit ABCD (*fig.* 35) un tétraèdre, AB, CD deux arêtes opposées, EFGH une section parallèle à ces arêtes et également di-

stante de chacune; EF sera $=\frac{1}{2}$CD, et GE$=\frac{1}{2}$AB, de sorte que si on construit le prisme ABCDKI, l'aire GF $=\frac{1}{4}$ID; or le prisme a pour mesure ID $\times$ la moitié de la distance de AB au plan ID, distance que je nomme h; le tétraèdre, qui est le tiers du prisme, a donc pour mesure ID $\times \frac{1}{6}h$ ou 4GF $\times \frac{1}{6}h$, ce qu'il fallait prouver.

Cela posé, tout polyèdre qui remplit les conditions exigées par l'énoncé se décomposera en tétraèdres rentrant dans les deux cas précédents. Soit, par exemple (*fig.* 36 et 36 *bis*), le polyèdre AFD, dont l'une des bases est un pentagone, l'autre un triangle; FG étant supposé parallèle à AB, la face AG est un trapèze, les autres sont des triangles; ce polyèdre se décompose en plusieurs parties, savoir : 1° HEBCD pyramide; 2° le tétraèdre BHGF; 3° le tétraèdre FAEB qui, de même que les deux premières parties, rentre dans le premier cas; 4° le tétraèdre FHBE, qui rentre dans le second cas.

II. (*Fig.* 37.) Si la surface latérale, au lieu d'être polyédrale, est courbe, mais réglée; soient AE, BF deux génératrices infiniment voisines, ABC, DEF des parties des contours des bases; tirez BE, et remplacez la portion de surface courbe ABFE par les deux triangles rectilignes ABE, BEF; en opérant de même sur toute la surface latérale, on ne changera qu'infiniment peu le volume du corps, ainsi que les aires des bases et sections; or il rentre dans l'énoncé, donc de même le corps donné.

III. (*Fig.* 38.) Soit maintenant l'anneau décrit par un segment circulaire ABC, tournant autour d'un diamètre extérieur DE; les bases sont nulles; si G est le milieu de AC, que l'on mène de A, G, C des perpendiculaires sur DE, la section

moyenne est l'aire décrite par BG autour de DE; or l'anneau a pour mesure : $\frac{1}{6}HI \times AC^2\pi$,

et $AC^2 = 4AG \times GC = 4BG \times GK = 4(BL - GL)(BL + GL)$,

donc :

$$\text{anneau} = \frac{1}{6}HI \times 4\pi(\overline{BL}^2 - \overline{GL}^2) = \frac{1}{6}HI \times 4 \text{ aire BG};$$

que, si à cet anneau on ajoute le tronc de cône décrit par ACIH autour de HI, lequel, selon ce qui précède, a pour mesure :

$$\frac{1}{6}HI \times (\text{aire AH} + \text{aire CI} + 4 \text{ aire GL}),$$

on aura le segment de sphère mesuré d'après l'énoncé.

IV. Je passe au segment d'ellipsoïde de révolution, et pour cela il suffit, dans la sphère précédente, de réduire dans un même rapport toutes les demi-cordes AH, BL, CI, perpendiculaires à DE; les aires décrites par ces cordes seront toutes altérées, dans un même rapport, égal au carré du précédent; il en est donc de même d'une tranche infiniment mince comprise entre deux plans perpendiculaires à DE, et par suite il en est de même du segment de sphère AHIC, dont le volume, ainsi que les aires des cercles AH, BL, CI, devront être multipliés par un même nombre pour passer à l'ellipsoïde.

De l'ellipsoïde de révolution on passera d'une manière analogue (*métamorphique*) à l'ellipsoïde à axes inégaux; ainsi, conservant pour section principale une section méridienne, on multipliera par un même nombre les perpendiculaires menées de tous les points de la surface de l'ellipsoïde sur ce plan; les sections perpendiculaires à l'axe de révolution seront multipliées par le même rapport, ainsi que le volume du segment.

(*Fig.* 39.) Une seconde transformation ou *déformation* conduira au cas où les bases du segment ne sont pas perpendiculaires à un axe principal. En effet, soit EF une droite quelconque menée par le centre de la surface, GH l'axe principal auquel les bases sont perpendiculaires; prenez chaque section comprise entre AB, CD et déterminée par un plan parallèle à ceux-là, et faites-la glisser dans son plan, sans changer la direction de ses axes, jusqu'à ce que son centre soit arrivé sur EF; le volume du segment n'aura pas changé, etc.

Le paraboloïde elliptique pouvant être considéré comme un ellipsoïde, le théorème s'applique à tout segment compris entre deux sections elliptiques parallèles.

(*Fig.* 40.) Reste l'hyperboloïde à deux nappes. Or soient ABC, DEF deux sections elliptiques parallèles faites dans une même nappe; GHI, KLM les sections correspondantes du cône asymptote, OQ le diamètre conjugué à ces sections; les quatre sections sont semblables, et par suite proportionnelles aux carrés des dimensions homologues PC, PI, QF, QM; or, à cause des asymptotes, les différences $PI^2 - PC^2$, $QM^2 - QF^2$ sont constantes pour toutes les sections parallèles; donc le corps compris entre le segment d'hyperboloïde et le tronc de cône GHIMLK donne, parallèlement au plan KLM, des sections de même aire, et se mesure comme un cylindre; par suite, il rentre dans le théorème; mais le tronc de cône y rentre aussi; donc le segment d'hyperboloïde également.

Il est évident que le théorème s'applique à une infinité d'autres corps, car deux corps compris entre deux plans parallèles ont même volume si tout plan parallèle à ceux-là et compris entre eux, détermine dans les deux corps des sections de même aire. Tout cela est renfermé dans un théorème de M. Sarrus, dont voici l'énoncé :

Si dans un corps toute section parallèle à un plan donné a

son aire exprimée par $A + Bz + Cz^2$, *où* z *est la distance de la section au plan;* A, B, C *sont des constantes; un segment quelconque renfermé entre deux plans parallèles au même plan, se mesure comme il a été dit plus haut.*

Un peu de calcul intégral suffit pour la démonstration.

Du reste, on fera remarquer que si dans un pareil corps on transforme chaque section en un cercle équivalent, et qu'on fasse glisser ces cercles dans leurs plans jusqu'à ce que les centres se trouvent sur une droite quelconque perpendiculaire à ces plans, le lieu des circonférences sera une surface du second degré; car si cette droite est l'axe des z, et qu'on appelle r le rayon d'un des cercles, on aura :

$$\pi r^2 = A + Bz + Cz^2;$$

soit x, y, z un point pris sur la circonférence du cercle, il vient :

$$r^2 = x^2 + y^2;$$

donc

$$\pi(x^2 + y^2) = A + Bz + Cz^2,$$

surface du second degré de révolution autour de l'axe des z.

Note. M. C. Koppe, de Soest (Westphalie), est auteur de ce théorème. Un corps ayant pour bases deux polygones parallèles et pour faces des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour hauteur la distance des deux polygones et pour base l'aire de la section parallèle faite à égales distances des deux bases et augmentée de la *douzième* partie de l'aire d'un polygone équiangle aux bases et qui a pour côtés les différences de leurs côtés homologues. (Crelle, t. XVIII, p. 275, 1838.)

Il faudrait démontrer l'identité de cette expression avec celle de M. Finck.

On trouve dans le Lilavati (chapitre VIII, § 221) cette évaluation du volume d'une pyramide tronquée à bases

rectangles ; a, b et a_1, b_1 étant les dimensions des deux bases, le volume est égal à $\frac{1}{6}h[ab+a'b'+(a+a')(b+b')]$, énoncé entièrement conforme au théorème de M. Finck ; celui de M. Kopp est $h\left[\frac{(a+a')(b+b')}{4}+\frac{1}{12}(a'-a)(b'-b)\right]$; l'énoncé ordinaire est $\frac{1}{3}h[ab+a'b'+\sqrt{aba'b'}]$, et les trois sont identiques.

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES,

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine d'artillerie.

I. Si d'un point quelconque N (*fig.* 41) ayant (α, β) pour coordonnées, on mène des normales à la parabole $y^2=2px$, on sait qu'il peut y avoir jusqu'à trois normales, et que les coordonnées de leurs pieds sont déterminées par l'équation du troisième degré :

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0. \qquad (1)$$

L'équation de la circonférence de cercle passant par les pieds des normales sera $(x-A)^2+(y-B)^2=R^2$; combinant cette équation avec celle de la parabole $y^2=2px$, et éliminant x, on a l'équation du quatrième degré :

$$y^4+4p(p-A)y^2-8p^2B.y+4p^2(A^2+B^2-R^2)=0 \quad (2)$$

qui aura trois racines y_1, y_2, y_3 identiques avec celles de l'équation (1) ; et comme les seconds termes manquent dans les équations (1) et (2), il est facile d'en conclure que la quatrième racine y_4 de l'équation (2) est égale à zéro. Donc

La circonférence de cercle passant par les pieds des trois normales à une parabole, issues d'un même point, passe aussi par

le sommet de la courbe, et réciproquement *si l'on fait passer une circonférence de cercle par le sommet d'une parabole et rencontrant la courbe en trois autres points, les normales en ces trois points iront concourir en un point unique.*

(*) De là résulte un moyen très-simple pour mener les normales à une parabole par un point donné, quelle que soit la position de ce point. Et en effet, si de l'équation (2) on fait disparaître la racine $y_4 = 0$, on aura l'équation :

$$y^3 + 4p(p-A)y^2 - 8p^2B = 0 \qquad (3)$$

et l'équation (3) étant identique à l'équation (1), puisqu'elles ont mêmes racines y_1, y_2, y_3, on en déduira :

$$2p(p-\alpha) = 4p(p-A) \text{ et } 2p^2\beta = 8p^2B,$$

d'où
$$A = \frac{p+\alpha}{2} \text{ et } B = \frac{\beta}{4}.$$

Par conséquent le centre de la circonférence de cercle passant par les pieds des normales issues du point N, se détermine par une construction on ne peut plus simple, et son rayon $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ est connu, puisque la circonférence passe par le sommet de la parabole.

Il est facile de démontrer que la somme des rayons vecteurs aboutissant aux pieds des normales est égale au double de l'abscisse du point N, diminué du quart du paramètre :

$$FA + FB + FC = 2\alpha - \frac{p}{2}.$$

Si le point N était situé sur l'axe de la parabole, outre la méthode générale, il existerait d'après cela un moyen encore bien plus simple pour construire les normales : du foyer F comme centre, on décrirait un arc de cercle avec FN pour rayon ; en joignant au point N les points où cet arc de cercle rencontre la parabole, on aurait deux normales ; la troisième est évidemment l'axe lui-même.

(*) Voir t. V, p. 673.

II. Dans le cas de l'ellipse, ce ne sont plus trois normales seulement, mais quatre, qu'on peut mener par un point donné; l'une de ces normales étant déterminée, les trois autres sont faciles à construire par une construction analogue à celle que nous venons d'indiquer pour la parabole.

(*Fig.* 42) Soient donc N le point duquel on se propose de mener des normales à l'ellipse, ND l'une de ces normales, (x_4, y_4) les coordonnées de son pied D, et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des pieds A, B, C des trois autres normales.

Des équations (A) et (B) (t. VI, p. 367), on déduit évidemment :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{2a^2\alpha}{c^2}, \text{ et } x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{4a^2.p_4}{c^2};$$

d'où, en ajoutant : $\quad x_4=\frac{a^2}{c^2}(\alpha-2p_4),$

et par suite $\quad p_4=\frac{\alpha}{2}-\frac{c^2}{2a^2}x_4;$

on aura de même $\quad q_4=\frac{\beta}{2}+\frac{c^2}{2b^2}y_4.$

Une construction très-simple permettra donc de déterminer le centre O_4 de la circonférence de cercle passant par les pieds A, B, C des normales, et le centre étant connu, la circonférence de cercle sera facile à décrire, puisqu'elle doit passer par le point D', diamétralement opposé au point D.

Il existe quatre circonférences de cercle passant par trois des pieds des quatre normales NA, NB, NC, ND, issues du même point N. Si l'on distingue par (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), et (p_4, q_4) les coordonnées des centres, on a les résultats suivants :

$$p_1+p_2+p_3+p_4=\alpha; \quad q_1+q_2+q_3+q_4=\beta.$$

III. Ce qui vient d'être dit pour l'ellipse s'applique également

ment à l'hyperbole ; il n'y a plus qu'à changer b^2 en $-b^2$. Mais dans le cas de l'hyperbole équilatère, les résultats se simplifient beaucoup ; ainsi l'on a :

$$p_4=\frac{\alpha}{2}-x_4,\ \text{et}\ q_4=\frac{\beta}{2}-y_4\,;$$

on a aussi les expressions très-simples :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\alpha\,;\ y_1+y_2+y_3+y_4=\beta.$$

Si, considérant actuellement l'équation

$$4a^2p_1^2+4b^2q_1^2+2c^2R_1^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)=2a^2(4p_1^2-\alpha^2)$$

(t. VI, p. 368), on y change b^2 en $-a^2$ pour passer de l'ellipse au cas de l'hyperbole équilatère, on parviendra, en faisant attention que $R_1^2=p_1^2+q_1^2-a^2-r_1^2$, à ce résultat remarquable :

$$r_1^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}.$$

Donc *dans une hyperbole équilatère les circonférences de cercle passant par trois des pieds des quatre normales issues d'un même point, ont toutes quatre même rayon.*

La grandeur de ce rayon est indépendante de la grandeur de l'axe de l'hyperbole ; elle ne dépend que de la distance du point duquel sont menées les normales au centre de la courbe.

Cas particuliers. (*Fig.* 44.) Si le point N est situé en N' sur l'axe transverse, la construction des normales est très-facile et plus simple ; on prend $OP=\frac{\alpha}{2}=\frac{ON'}{2}$, et l'on élève une perpendiculaire au point P ; si elle rencontre la courbe en A et Q, les droites N'A, N'Q seront deux normales : construction identique, si le point N est situé sur l'axe non transverse. On peut remarquer ce théorème.

Dans une hyperbole équilatère, les portions d'une même normale comprises entre les axes sont égales. Ainsi :

$$AN' = AN''.$$

Si le point N est situé sur la courbe même, en A par exemple, on mène le diamètre AOA' ; du point R au milieu de oA, comme centre, et avec OR pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre la courbe en un second point S, différent du point A' ; la droite AS est une normale.

Il existe une relation assez simple entre les distances du centre de l'hyperbole équilatère aux centres des quatre cercles et au point N. On a en effet :

$$\overline{Oo_1}^2 + \overline{Oo_2}^2 + \overline{Oo_3}^2 + \overline{Oo_4}^2 = \overline{ON}^2 ;$$

on a aussi :

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{ON}^2,$$

et enfin :

$$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{NC}^2 + \overline{ND}^2 = 2\overline{ON}^2.$$

On a ce théorème toujours dans le cas de l'hyperbole équilatère.

Les pieds des quatre normales issues d'un même point sont tels que la droite joignant deux quelconques d'entre eux est perpendiculaire à la droite joignant les deux autres. Ainsi, par exemple, AD est perpendiculaire à BC ; démonstration facile fondée sur le théorème 150 de Joachimstal (t. VI, p. 241).

L'expression $np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 2(a^2 + b^2)$ (t. VII, p. 117) a également lieu, mais elle se réduit à zéro, c'est-à-dire que dans l'hyperbole équilatère on a :

$$np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 0$$

à cause de

$$b^2 = -a^2.$$

Enfin q, q', q'', q''' exprimant les distances du centre de

l'hyperbole équilatère aux normales, il est facile de démontrer la relation :

$$nq+n'q'+n''q''+n'''q'''=0.$$

Cette relation est dans le cas de l'ellipse :

$$2\alpha\beta\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=nq+n'q'+n''q''+n'''q'''.$$

Note. 1° Les pieds des normales menées par un point à une conique sont sur une hyperbole équilatère; donc lorsque cette conique est aussi une hyperbole équilatère, les deux courbes passant par les quatre mêmes points, l'un de ces points est le point de *rencontre* du triangle formé par les trois autres (t. II, p. 43).

2° Le cercle circonscrit à un triangle et les trois cercles qui passent par le point de *rencontre* et deux des sommets sont égaux (t. II, p. 514).

3° Le cercle des *neuf* points passant par les deux centres des deux hyperboles équilatères, on a onze points sur la même circonférence. (Mention.)

THÉORÈME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

Si une droite touche aux points P, R respectivement, deux hyperboles équilatères qui ont le même centre O et qui se coupent en Q, les trois distances OP, OQ, OR formeront une proportion continue. (Strebor.)

PAR M. MENTION.

—

Je prends le rayon central OQ commun pour axe des x, une perpendiculaire à ce rayon mené par le centre pour axe des y.

Si d est la longueur de ce rayon central, les équations des deux hyperboles sont :

$$y^2+Bxy-x^2+d^2=0,\quad y^2+B'xy-x^2+d^2=0.$$

Il faut faire voir que $d^2=\mathrm{OP.OR}$.

Soit $y+rx+s=0$ l'équation de la tangente, et x', y', x'', y'' les coordonnées des points P et R, on a :

$$x'=\frac{s(B-2r)}{2(r^2-Br-1)};\quad y'=\frac{s(Br+2)}{2(r^2-Br-1)}\quad \text{(t. II, p. 108)},$$

d'où $$\overline{OP}^2=\frac{s^2[r^2+1]\,[B^2+4]}{4[r^2-Br-1]^2}.$$

La condition de tangence donne :

$$s^2(B^2+4)=4d^2(r^2-Br-1)\qquad (1)$$

(t. II, p. 108,)

de là $$\overline{OP}^2=\frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B^2+4)}\quad \text{et}\quad \overline{OR}^2=\frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B'^2+4)};$$

or B et B′ sont racines de la même équation (1).

La théorie des fonctions symétriques donne :

$$(B^2+4)(B'^2+4)=\frac{16d^4}{s^4}(r^2+1)^2;\ \overline{OP}^2.\overline{OR}^2=d^4 \text{ et } \mathrm{OP.OR}=d^2.$$

Observation. Ce calcul est une vérification utile et provisoire.

NOTE

sur l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle et sur la parabole inscrite à un triangle,

PAR M. MENTION.

—

Théorème I. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe. Ce théorème résulte du suivant :

« Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit dans une » hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole » (voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 43) ; et inversement, si » ce cercle passe par le centre de l'hyperbole, que deux des » sommets du triangle soient situés sur la courbe, le troisième » y sera aussi. »

Théorème II. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est situé sur la directrice de cette courbe. Si l'un des côtés du triangle est la tangente au sommet, la proposition se démontre aisément ; elle sert de lemme pour la proposition générale.

Les côtés du triangle forment en effet, avec la tangente au sommet, un quadrilatère auquel on applique le théorème suivant :

« Quatre droites situées dans un même plan forment quatre » triangles, dans chacun de ces triangles existe un point de » rencontre des hauteurs ; les quatre points de rencontre sont » sur une même droite. »

Il n'y a donc qu'à démontrer le théorème lorsque l'un des côtés du triangle circonscrit est la tangente au sommet (*fig.* 45). Évidemment le point de rencontre se trouve sur une perpendiculaire à la directrice. Soient MAB le triangle circonscrit, et I le point où la hauteur perpendiculaire à la directrice rencontre cette dernière ; prouvons que AI est perpendiculaire à MB ou parallèle à FB ; F est le foyer de la parabole. A′, B′ étant les points où FA, FB rencontrent la directrice, $MA' = MB' = MF$; ainsi I est le milieu de A′B′ ; dès lors AI, joignant les milieux A et I de deux côtés FA′, A′B′ d'un triangle, est parallèle au troisième côté FBB′....

c. q. f. d.

Note. Démonstrations analytiques :

Théorème I. Toutes les hyperboles équilatères circon-

scrites à un triangle se coupent au point de rencontre des hauteurs du triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons le sommet A pour origine, la direction AB pour axe des $+x$, les coordonnées rectangulaires, et faisons AB$=$E; deux hyperboles équilatères passant par les points A et B, auront pour équations :

$$y^2+Bxy-x^2+Dy+Ex=0\,;\ y^2+B'xy-x^2+D'y+Ex=0\,;$$

donc les deux autres points d'intersection sont situés sur la droite $x(B-B')+D-D'=0$, c'est-à-dire sur une droite perpendiculaire à AB; mais C est un point d'intersection, donc le second point est sur la hauteur du triangle passant par C; de même sur la hauteur passant par A, etc. c. q. f. d.

Théorème II. Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un triangle passent par le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons A pour origine, AB pour axe des $+x$, BC pour axe des $+y$, l'équation de la parabole peut être mise sous la forme :

$$p^2y^2-2pqxy+q^2x^2-2py-2qx+1=0; \qquad (1)$$

l'équation de la directrice est :

$$y(q+p\cos\gamma)+x(p+q\cos\gamma)+\cos\gamma=0. \qquad (2)$$

(t. II, p. 433.)

Soit $dy+ex+f=0$ l'équation de la droite BC, la condition de tangence donne :

$$dfq+efp-de=0, \qquad (3)$$

éliminant q entre (2) et (3), on a :

$$pf[y(d\cos\gamma-e)+x(d-e\cos\gamma)]+d[ey+ex\cos\gamma+f\cos\gamma]=0;$$

or, cette droite passe constamment par le point d'intersection des deux droites :

$$y(d\cos\gamma-e)+x(d-e\cos\gamma)=0,\ ey+ex\cos\gamma+f\cos\gamma=0.$$

La première est l'équation de la hauteur du triangle passant par l'origine A, et la seconde est l'équation de la hauteur passant par B; donc, etc. Tm.

SOLUTION DE LA QUESTION 186 (t. VII, p. 240),

PAR M. LUCIEN GILLES,
Élève du lycée Monge. (*)

En chassant les dénominateurs, on trouve :

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)B - A_1^2(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) -$$
$$- A_2^2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n) -$$
$$- A_n^2(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0.$$

Si n est impair, en faisant successivement :

$$x = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ldots a_n,\ +\infty,$$

on trouve n variations; donc il y a n racines réelles.

Et si n est pair, en faisant successivement :

$$x = -\infty,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n,$$

nous trouvons aussi n variations; donc dans tous les cas, il y a n racines réelles. Les racines sont rangées par ordre de grandeur.

Note. Le même élève et M. Mention ont envoyé chacun une bonne solution de la question 184. Nous les donnerons réunies prochainement.

(*) Pourquoi, dans les nouveaux noms donnés aux colléges de Paris, a-t-on omis celui de Carnot? Comme géomètre, il occupe un rang distingué; comme républicain, il est unique, n'ayant jamais encensé les autels de Baal. Bailly, Lavoisier, Condorcet n'ont-ils pas autant de valeur morale et scientifique que Charlemagne et Napoléon? Si l'on a conservé ceux-ci comme chefs de nation, pourquoi avoir ôté Louis-le-Grand, qui a donné son nom au siècle le plus célèbre de France, par ses conquêtes littéraires et par ses conquêtes territoriales persistantes, productives, les seules qui soient sensément glorieuses.

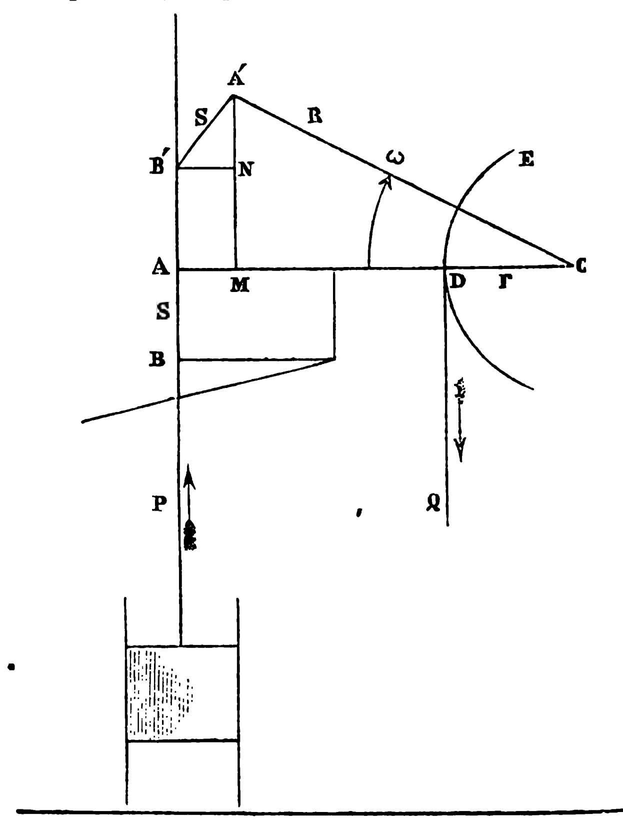
NOTE

sur l'action statique de la force dans le parallélogramme articulé de Watt (voy. p. 68) (*).

PAR M. BABINET.

—

D'après le principe des vitesses virtuelles, si, dans un



(*) M. Babinet ayant eu l'obligeance de nous communiquer la démonstration de la formule à laquelle il est fait allusion à la page 68 de ce volume, nous nous faisons un plaisir d'en faire part à nos lecteurs.

système quelconque en équilibre, on produit un des mouvements que comporte la liaison de tous les points du système, de manière que les déplacements des points d'application des forces soient très-petits, on aura :

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

P, P', P'', etc. étant les forces, et p, p', p'', etc. les projections des petits espaces parcourus par les points d'application de ces forces sur leurs directions respectives ; p, p', p'', etc. étant pris positivement quand la projection tombe dans le sens même suivant lequel la force agit, et négativement dans le cas contraire.

Par exemple, dans la position rectangle du parallélogramme de Watt, soit P la force ascensionnelle du piston, Q une force dirigée de haut en bas et agissant sur un arc de cercle ou poulie DE à une distance $CD = r$ du point C, et mesurant ainsi l'action P du piston qu'elle équilibre. Le piston agit à une distance $CA = R$ du point fixe C. Si je donne un mouvement angulaire $d\omega$ infiniment petit au bras de levier AC, le point A parcourra l'espace $Rd\omega$ de A vers B' dans le sens de la force P ; le point D parcourra un espace $rd\omega$ dans le sens contraire à la force Q ; et l'on aura :

$$PRd\omega - Qrd\omega = 0 ;$$

d'où

$$PR = Qr,$$

ou bien

$$\frac{Q}{P} = \frac{R}{r} ;$$

c'est l'équation ordinaire d'équilibre du levier.

Pour le cas où le point d'application de la force ascensionnelle P du piston est en B', il faut calculer la hauteur $AB' = h$ en fonction de l'angle $A'CA = \omega$, et ensuite différencier l'expression de h ; c'est ce qui est très-simple.

En effet, en supposant rectiligne et verticale la course BAB' de l'articulation sur laquelle agit la force P, on a :

$$AB' = A'M - A'N,$$

$$A'M = R\sin\omega,\quad A'N = \sqrt{\overline{A'B'}^2 - \overline{B'N}^2};$$

mais $$B'N = AM = AC - MC = R - R\cos\omega,$$

et $$A'B' = AB = S;$$

donc

$$A'N = \sqrt{S^2 - R^2(1-\cos\omega)^2} = R\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2};$$

ainsi $$h = R\sin\omega - R\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}.$$

Soit maintenant Q' la force qui, appliquée au bras de levier r, ferait équilibre à la force P du piston agissant dans la nouvelle forme du système ; on aura $rd\omega$ pour le déplacement du point d'application de la force Q', et dh pour celui de la force P ; d'où :

$$Pdh - Q'rd\omega = 0.$$

Mais, d'après l'expression de h, on a par la différentiation :

$$dh = R\cos\omega d\omega + R\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega d\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}};$$

donc

$$PR\cos\omega d\omega + PR\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}}d\omega - Q'rd\omega = 0;$$

d'où $$\frac{Q'}{P} = \frac{R}{r}\left[\cos\omega + \frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2} - (1-\cos\omega)^2}}\right].$$

Mais dans la position rectangulaire du parallélogramme, on avait :

$$\frac{Q}{P}=\frac{R}{r};$$

le coefficient $\cos\omega+\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\sqrt{\frac{S^2}{R^2}-(1-\cos\omega)^2}}=\frac{Q'}{Q}$ exprimera donc le rapport de l'action statique Q' du piston dans une position quelconque, à l'action Q qu'il exerce quand le parallélogramme est rectangle.

Quant à l'action dynamique, elle dépend, non-seulement de l'intensité de la force modifiée par le système où elle est engagée, et du chemin que parcourt son point d'application, mais encore du temps employé à produire le déplacement de ce point.

Note. Pour faire une application de la formule qui précède, il faut commencer par la rendre calculable au moyen des logarithmes. A cet effet, remplaçons $1-\cos\omega$ par $2\sin^2\frac{1}{2}\omega$, et posons :

$$\cos\varphi=2\frac{R}{S}\sin^2\frac{1}{2}\omega;$$

il en résultera

$$\frac{Q'}{Q}=\cos\omega+\frac{\cos\varphi\sin\omega}{\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi\cos\omega+\sin\omega\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

ou

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\varphi}.$$

Cela posé, soit $R=2,515$, $S=0,762$, $\omega=17^\circ\ 35'\ 30''$. (Nous empruntons ces données à M. de Prony : *Rapport sur les machines à vapeur du Gros-Caillou*; Paris, 1826.)

On tire de là, d'abord $\varphi=81^\circ\ 7'\ 16''$, d'où $\varphi+\omega=98^\circ 42' 46''$, et par suite $\frac{Q'}{Q}=1,0005.$

(A. J. H. Vincent.)

En effet, en supposant rectiligne et verticale la co[illegible]
de l'articulation sur laquelle agit la force P, on a

$$AB' = A'M - A'N,$$

$$A'M = R \sin \omega, \quad A'N = \sqrt{A'B'^2 - \ldots}$$

mais $B'N = AM = AC - MC = R - \ldots$

et $A'B' = AB = S$;

donc

$$A'N = \sqrt{S^2 - R^2(1 - \cos \omega)^2} = \ldots$$

ainsi $h = R \sin \omega - R \ldots$

Soit maintenant Q' la force ... statique Q du piston dans une
ferait équilibre à la forc... qu'il exerce quand le
velle forme du système... dépend, non-seulement
du point d'application... le système où elle est
force P ; d'où :

Mais, d'après l'... certai
...e à $m''m'''$, c
$dh =$ ...ontre I de $m'm'''$
...u point M, mais con
...tre parallèle à $m''m'''$, TI e
donc ...oint le centre O de la courbe a
PR... , cette droite est le diamètre cc
...allèles à MN ; donc le point I est mi
... on voit que si l'on a trois points m', m'', ...
...ce, etc.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 151 (*voir* t. VI, p. 388).

PAR M. MANNHEIM,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Catalan).

Supposons m', m'', m''' sur une ellipse; menons par les points m', m'' des tangentes à cette courbe que nous supposons se couper en T; joignons le point m'' au point m'''; et par le point T menons une sécante parallèle à la corde $m''m'''$. Cela fait, si l'on joint le point m''' au premier point m', la ligne de jonction $m'''m'$ passe au milieu de la corde interceptée sur la *sécante* partant du point T et parallèle à $m''m'''$.

Fig. 46. Soient m', m'', m''' les trois points sur l'ellipse. Du point m' je mène m'C parallèle à $m''m'''$. Je joins m', m''; C.m'' ces deux droites vont se couper en un certain point M. Si de ce point on mène MN parallèle à $m''m'''$, cette droite sera la polaire du point de rencontre I de $m'm'''$ avec Cm''; la droite TI est la polaire du point M, mais comme la polaire du point M doit être parallèle à $m''m'''$, TI est parallèle à $m''m'''$. Si l'on joint le centre O de la courbe au pôle I de la droite MN, cette droite est le diamètre conjugué des cordes parallèles à MN; donc le point I est milieu de AB; d'où l'on voit que si l'on a trois points m', m'', m''' sur une ellipse, etc.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'arithmétique a l'usage des élèves, etc., par M. Guilmin. (Fin, *voir* p. 109.)

Le chapitre VI (p. 132-184) traite de l'extraction des racines carrées et cubiques. Le point si épineux des approximations est développé avec soin et expliqué avec clarté, d'après les principes contenus en divers articles dont l'excellent professeur a bien voulu enrichir les *Nouvelles Annales* (t. I, p. 249, 487, et t. IV, p. 205); la règle pour l'extraction de la racine carrée contient *quarante-sept* lignes. Les énoncés fondamentaux devant être confiés à la mémoire, on ne saurait les rendre trop courts. Descartes, dans une lettre à Mersenne, se plaint de ne pouvoir retenir la règle pour l'extraction de la racine cubique; chaque fois qu'il en a besoin, il est obligé de l'inventer, et il prie Mersenne de lui épargner cette fatigue, en ne l'entretenant plus de questions d'arithmétique.

Chapitre VII (p. 185-208). *Des rapports et proportions.* Nous engageons nos lecteurs à consulter l'exposition philosophique qu'a faite M. Gergonne de la théorie de la règle de trois (*Annales*, t. VII, p. 117, 1816); le savant géomètre établit parfaitement l'inutilité scientifique de la théorie des proportions. Toutefois, fournissant bon nombre de pages, elle est utile aux auteurs.

Chapitre VIII (p. 208-236). *Théorie des logarithmes.* Correspondance de deux progressions, selon l'idée néperienne; nouvelle preuve que la méthode d'invention est rarement

la plus simple. Certes, l'exposition exponentielle d'Euler est plus facile, plus satisfaisante, et même plus exacte, car elle rend raison des valeurs multiples des logarithmes, de l'imaginarité des logarithmes des nombres négatifs ; ce qu'il serait très-pénible de déduire de la méthode des deux progressions conjuguées. Mais celle-ci, on doit en convenir, a le même avantage que nous avons indiqué ci-dessus pour les proportions.

DEUXIÈME PARTIE. *Applications* (p. 239-352).

Sous le titre de problèmes et questions d'examen, l'auteur donne le système métrique et diverses applications des quatre règles, de la règle de trois, de l'intérêt simple et composé, de la règle de société, d'alliage et de change, ce qui met les élèves intelligents en état de répondre à toutes les questions d'arithmétique commerciale qu'on fait dans les examens. Il serait à désirer que les données fussent toujours *pratiques* et puisées dans la statistique du pays. Le Lilavati donne des règles de trois, de cinq, de sept et de neuf. Comme dans ces sortes de questions il s'agit, au moyen d'un certain nombre de rapports donnés, de trouver le second terme d'un rapport dont on connaît le premier terme, le nombre de données est donc essentiellement impair. L'exemple pour la règle de sept est celui-ci : Si 8 écharpes de soie, mesurant 3 coudées de largeur et 8 de longueur, coûtent 100 *nishas*, combien coûtera 1 écharpe de $3\frac{1}{2}$ coudées de long sur $\frac{1}{2}$ de large (sect. VI, § 82).

Chapitre IX. *Appendice.* Ce nom convient-il au chapitre d'un ouvrage? *Des différents systèmes de numération.* On trouve ici les théories des fractions périodiques dans une base quelconque.

Chapitre X. *Appendice.* Preuves par 9 et 11, oubliées dans

l'ouvrage; divisibilité par 7; limite du plus petit nombre de divisions dans la recherche du p. g. c. d. et sur le plus petit multiple commun, application des progressions à divers problèmes. Enfin l'ouvrage est terminé par les méthodes abrégées de l'auteur sur les approximations numériques et par la division ordonnée de Fourier.

Cet ouvrage annonce partout un professeur connaissant tous les détours des examens; aussi il sera recherché des candidats aux diverses écoles. Le style, reproduisant les explications données au tableau, est parfois trop verbeux; c'est un défaut dont les élèves ne se plaindront pas.

Le succès que l'arithmétique de M. Guilmin a obtenu dans un grand nombre de lycées et d'institutions spéciales a été sanctionné par le suffrage universitaire. Elle a été autorisée, le 28 avril 1848, par le conseil de l'instruction publique pour l'enseignement des lycées.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'équations, d'après M. Plucker, professeur à Bonn (Crelle, t. XVI, p. 47, 1837), *en français.*

—

I. *Lemme.* Une équation algébrique complète a deux variables, de degré n à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\text{N}$ coefficients.

II. *Théorème I.* Si l'on donne à deux quantités variables successivement $\text{N}-1$ couples de valeurs, et si l'on suppose que ces valeurs satisfont à une équation quelconque de degré n entre les deux variables, il y aura $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

nouveaux couples de valeurs qui satisfont à la même équation et qui dépendent uniquement des couples précédents.

Démonstration. Soit $F_n=0$ l'équation générale de degré n entre deux inconnues et à laquelle satisfont $N-1$ couples de valeurs ; toutes les équations de degré n, auxquelles ces mêmes couples de valeurs satisfont, peuvent être représentées par $F_n+\mu f_n=0$, où μ est un coefficient arbitraire et f_n une autre fonction quelconque de degré n ; il est évident que les $N-1$ couples de valeurs satisferont aussi à l'équation $f_n=0$; or les deux équations $F_n=0$, $f_n=0$ admettent n^2 couples de valeurs communes et pas davantage, et

$$n^2=N-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2};$$

donc l'équation $F_n=0$ est satisfaite par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nouveaux couples de valeurs.

III. *Théorème II.* Si l'on connaît $N-1$ couples des racines de deux équations du $n^{ème}$ degré entre deux inconnues, on obtiendra les $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ couples de racines restantes sans avoir recours à ces équations.

Démonstration. Éliminant une des inconnues, on obtient une équation de degré n^2 de la seconde inconnue ; on connaît $N-1$ racines ; les autres $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ racines dépendent donc d'une équation de ce degré.

IV. *Théorème III.* Si m des coefficients de l'équation d'un degré n quelconque entre deux variables sont donnés, ou bien encore s'il existe m équations linéaires entre ces coefficients, il suffira de connaître $N-1-m$ couples de valeurs de deux variables qui satisfont à l'équation du $n^{ème}$ degré pour en déduire $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+m$ nouveaux couples.

Démonstration. $N-1-m+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+m=n^2$.

V. *Théorème IV.* Si l'on connaît $\left(nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}\right)$ couples de racines de deux équations du $n^{ème}$ et du $q^{ème}$ degré entre deux inconnues, n étant plus grand que q et q plus grand que 2, on en déduira $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$ couples des racines restantes sans recourir aux équations proposées, en fonction des racines connues et par la résolution de deux équations du degré $\frac{(q-1)(q-2)}{1.2}$.

Démonstration. Parmi les $N-1$ couples de valeurs qui satisfont à l'équation $F_n=0$, choisissons à volonté :

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}-1$$

couples qui déterminent complétement une équation de degré p, représentée $f_p=0$; supposons $n=p+q$, les couples sont au nombre de

$$N-1-\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right]=nq-\frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

Supposons que ces couples restants satisfassent à une équation de degré q ou à $\varphi_q=0$; or les équations $F_n=0$, $\varphi_{(q)}=0$ ont en commun nq couples de racines; donc, etc.

VI. *Lemme.* L'équation générale du degré n entre trois inconnues contient $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1=N$ constantes.

VII. *Théorème V.* Si l'on donne à trois quantités variables successivement $N-1$ groupes de valeurs quelconques, et si l'on suppose que ces variables satisfont à une équation générale du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y aura une infinité de tels groupes, dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont tous à cette même équation.

Démonstration. Car ces N — 1 groupes déterminent tous les coefficients en fonction d'un seul, qui reste indéterminé.

VIII. *Théorème VI.* Si l'on donne à trois quantités variables successivement N — 2 groupes de valeurs, et si l'on suppose que ces groupes satisfont à une équation quelconque du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y aura toujours n^3 — N + 2 nouveaux groupes de valeurs et dépendant uniquement des groupes donnés, qui satisferont à cette même équation.

IX. *Théorème VII.* Si l'on connaît N — 1 groupes de valeurs qui satisfont en même temps à deux équations du $n^{ème}$ degré entre trois inconnues, l'on obtiendra une infinité de tels groupes sans avoir recours aux deux équations proposées.

X. *Théorème VIII.* Si l'on connaît (N — 2) groupes de racines de trois équations données du $n^{ème}$ degré entre trois inconnues, l'on en déduira les (n^3—N+2) groupes de racines restantes sans avoir recours aux équations données.

XI. *Théorème IX.* Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ème}$ degré entre les trois variables, il y en a m de donnés, ou bien encore si m équations linéaires de condition ont lieu entre ces coefficients, il en résultera :

1° Que N — m — 1 groupes donnés des trois variables qui vérifient l'équation générale en comportent un nombre infini;

2° Que N — m — 2 groupes donnés en comportent n^3—N+m+2 groupes nouveaux.

XII. *Théorème X.* Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-\frac{(n-q+1)(n-q+2)(n-q+3)}{1.2.3}-1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations entre trois variables, dont l'une s'élève au degré n et l'autre au degré q, l'on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations.

XIII. *Théorème XI.* Si l'on connaît

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-\frac{(n-q+1)(n-q+2)(n+q+3)}{1.2.3}-\frac{(n-s+1)(n-s+2)(n-s+3)}{1.2.3}-1$$

groupes des racines de trois équations entre trois inconnues et dont les degrés s'élèvent respectivement à n, q et s, l'on en déduira tous les autres groupes sans avoir recours aux trois équations proposées.

Observations. Les deux derniers théorèmes se démontrent comme on a fait pour le théorème IV.

XIV. *Lemme.* Le nombre des coefficients d'une équation de degré n entre g variables est :

$$S_n=ng+\frac{n.n-1}{1.2}.\frac{g.g-1}{1.2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{g.g-1.g-2}{1.2.3}+\text{etc.}$$

XV. Si parmi les coefficients de l'équation générale du $n^{ième}$ degré entre g variables il y en a m de donnés, il en résultera :

1° Que si $S_n-m-(g-h)$ groupes donnés de g variables, qui vérifient l'équation générale, en comportent un nombre infini de pareils groupes, de sorte que dans tous ces groupes l'on peut prendre à volonté les valeurs de $(h-1)$ des g variables, où h est un nombre arbitraire >1 et $<g$;

2° Que $S_n-m-(g-1)$ groupes donnés en comportent $n^g-s+m+g-1$ groupes nouveaux.

XVI. *Théorème général.* Si l'on connaît

$$S_n-S_{(n-p)}-S_{(n-q)}\ldots-(g-1)$$

groupes de racines de g équations entre g inconnues, et s'élevant respectivement aux degrés $n, p, q\ldots$, l'on en déduit tous les autres sans avoir recours à ces équations qui restent complétement déterminées.

THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE DE M. STEINER,
démontré par M. Jacobi (Crelle, t. XIV, p. 64, 1835).

—

Théorème. p est un nombre premier ; a_1, $a_2 \dots a_n$ sont n nombres non divisibles par p et laissant n résidus *différents* ; la somme des combinaisons avec répétition de la classe $p-r$ de ces n éléments est divisible par p lorsque $r>1$ et $<n-1$.

Démonstration. Soit $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)=A_1$,

$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)=A_2,$$

$$\vdots$$

$$(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})=A_n.$$

Ainsi A_1, $A_2 \dots A_n$ ne sont pas divisibles par p.

Si l'on pose

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}=\frac{P}{x^n}+\frac{P'}{x^{n-1}}+\frac{P''}{x^{n-2}}+\dots,$$

on sait que $P^{(m)}$ est la somme des combinaisons avec répétition de la classe m des n *éléments*, a_1, $a_2 \dots a_n$.

On a aussi l'expression connue

$$P^{(m)}=\frac{a_1^{\,n+m-1}}{A_1}+\frac{a_2^{\,n+m-1}}{A_2}+\dots\frac{a_n^{\,n+m-1}}{A_n},$$

et lorsque $k=0$ ou $<n-1$, on a :

$$\frac{a_1^{\,k}}{A_1}+\frac{a_2^{\,k}}{A_2}+\frac{a_3^{\,k}}{A_3}+\dots\frac{a_n^{\,k}}{A_n}=0.$$

Faisons $n+m-1=k+\beta(p-1)$, ou $m=k+\beta(p-1)-(n-1)$, ou $m<\beta(p-1)$; alors, d'après le théorème de Fermat,

$$a_1^{\,n+m-1},\ a_2^{\,n+m-1}\dots a_n^{\,n+m-1},$$

divisés par p, laissent les mêmes résidus que

$$a_1^k, \; a_2^k \; \ldots . \; a_n^k \; ;$$

donc le produit $A_1A_2 \ldots . A_nP^{(m)}$ laisse le même résidu que

$$A_1A_2 \ldots . A_n\left(\frac{a_1^k}{A_1}+\frac{a_2^k}{A_2}+\ldots .+\frac{a_n^k}{A_n}\right).$$

Or ce produit est nul ; donc $P^{(m)}$ est divisible par p. Posons $\beta=1$, et faisant k successivement égal à $0, 1, 2, 3 \ldots . n-2$, on a le théorème énoncé ; en prenant pour β un nombre entier positif quelconque, on a un énoncé plus général.

RECUEIL DE FORMULES

relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques. Suite (*voir* t. V, p. 413).

Trigonométrie sphérique.

83. $\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\sin\frac{1}{2}c\cos(P-A)\,;\; P=\frac{1}{2}(A+B+C)\,;$ fournit cinq autres (*).

84. $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\cos(P-C)$ fournit deux autres.

85. $\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\sin P$ id.

86. $\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)$.

87. $\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B)$.

(*) Les formules 83, 84, 85 sont dues à M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (Crelle, t. X, p. 146), et les formules 86, 87, 88, 89, à Delambre (Connaissance des temps de 1809, p. 45, publiée en 1807).

88. $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B)$.

89. $\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B)$.

90. $4\sin a\sin b\sin c=\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c$, lorsque $a+b+c=2^q$.

91. $\pm\frac{1}{4}\pi=\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+$ etc. (Le signe $+$ ou $-$ selon que $\cos x$ est positif ou négatif.

92. $\cos x=\pm$

$$\pm\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{\cos 2x}{1.3}-\frac{\cos 4x}{3.5}+\frac{\cos 6x}{5.7}-\frac{\cos 8x}{7.9}+\ldots\right).$$

93. $\cos^2 x=\pm\frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1.1.3}+\frac{\cos 3x}{1.3.5}-\frac{\cos 5x}{3.5.7}+\frac{\cos 7x}{5.7.9}-\ldots\right)$.

94. $\cos^3 x=\pm$

$$\pm\frac{12}{\pi}\left(\frac{1}{3.1.1.3}+\frac{2\cos 2x}{1.1.3.5}+\frac{2\cos 4x}{1.3.5.7}-\frac{2\cos 6x}{3.5.7.9}+\ldots\right).$$

Observation. Ces quatre formules ont été données par M. Kummer, dans un mémoire extrêmement remarquable sur la manière de développer d'une infinité de manières en série les puissances de $\sin x$ et $\cos x$ (Crelle, t. XIV, p. 121, 1835); mais Fourier a déjà donné les formules 91 et 92 dans la Théorie de la chaleur (p. 175, 1822).

95. $\sin(w-x)\sin(y-z)+\sin(w-y)\sin(z-x)+$
$+\sin(w-z)\sin(x-y)=0$.

Observation. En ôtant partout le mot *sinus*, on obtient une identité entre les six différences de quatre quantités.

M. Jacobi a trouvé la magnifique identité suivante pour les fonctions elliptiques :

$$\sin am(w-x)\sin am(y-z)+\sin am(w-y)\sin am(z-x)+$$
$$+\sin am(w-z)\sin am(x-y)+k^2\sin am(w-x)\sin am(y-z)$$
$$\sin am(w-y)\sin am(z-x)\sin am(w-z)\sin am(x-y)=0;$$

sait que *am* signifie l'amplitude ou l'angle φ dans l'inté-
ale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ où k est le module (Crelle, t. XV, 200, 1835).

96. $\sin x \sin y + \sin z \sin(z+x+y) = \sin(z+x)\sin(z+y)$.
$\sin am(x) \sin am(y) + \sin am(z) \sin am(z+x+y) -$
$- \sin am(z+x) \sin am(z+y) =$
$am(x) \sin am(y) \sin am(z) \sin am(z+x) \sin am(z+y) \sin am(+x+y)$.

97. $\tang x \tang y + \tang z \tang y(z+x+y) -$
$- \tang(z+x) \tang(z+y) =$
$\tang x \tang y \tang z \tang(z+x) \tang(z+y) \tang(z+x+y)$.

SUR L'EXTRACTION

ne racine du binôme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, *d'après M. J. Plana, à Turin* (Crelle, t. XVII, p. 331, 1837), *en français*.

—

I. Soient $A^2 = a$, $B^2 = b$; A^2 et B^2 sont deux nombres ra-
nnels entiers, et $A^2 > B^2$; il s'agit d'extraire la racine de
gré n du binôme $A \pm B$; j'écris $\sqrt[n]{A \pm B} = \frac{x \pm y}{2\sqrt[2n]{p}}$ et on
garde p comme un nombre entier, ainsi que les carrés x^2
y^2. Ceci admis, on a nécessairement les deux équations :

$$\sqrt[n]{A+B} = \frac{x+y}{2\sqrt[2n]{p}}; \quad \sqrt[n]{A-B} = \frac{x-y}{2\sqrt[2n]{p}};$$

où

$$x^2-y^2 = 4\sqrt[n]{(A^2-B^2)p}; \; x^2+y^2 = 2[\sqrt[n]{(A+B)^2p} + \sqrt[n]{(A-B)^2p}].$$

Soit

$$A^2-B^2=2^a.3^{a'}.5^{a''}.7^{a'''}\ldots,$$

et prenons :

$$p=2^{n-a}.3^{n-a'}.5^{n-a''}.7^{n-a'''}\ldots,$$

on aura :

$$(A^2-B^2)p=(2.3.5.7\ldots)^n=r^n;$$

par là les nombres entiers p et r sont connus. Posons :

$$z=\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}, \qquad (1)$$

on déduit :

$$x=\sqrt{z+2r};\ y=\sqrt{z-2r} \text{ et } \sqrt[n]{A\pm B}=\frac{\sqrt{z+2r}\pm\sqrt{z-2r}}{2\sqrt[2n]{p}};$$

il faut donc pour que cette extraction soit possible que z soit un nombre entier.

Faisons :

$$\frac{\alpha}{2}=(A^2+B^2)p;\quad \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}=2pAB;$$

ou bien :

$$\alpha=2p(A^2+B^2);\quad \beta=p^2(A^2-B^2)^2=r^{2n};$$

alors

$$z=\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}.$$

Cette forme nous apprend que z est racine d'une équation de Moivre de degré n, et on aura pour déterminer α l'équation

$$\alpha=z^n-nr^2z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}z^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}z^{n-4}\ldots \qquad (2)$$

Si n est impair, le second membre est divisible par z, et r doit être un facteur du nombre entier α; pour le trouver rapidement, on calcule avec une table de logarithmes les deux parties de la valeur de z de l'équation (1), en ayant soin de faire ce calcul avec plusieurs chiffres décimaux ; ensuite

on voit si l'addition de ces deux nombres donne un nombre entier avec une grande approximation, et l'équation (2) servira à vérifier ce nombre. Ce procédé sert aussi à indiquer l'impossibilité de l'extraction de la racine demandée, en donnant une fraction fort éloignée de l'unité pour la somme des deux parties décimales.

Si n est pair, le second membre de l'équation (2) est divisible par z^2; en sorte que, en admettant qu'elle eût des racines commensurables, on en pourrait tirer une valeur entière pour z^2; mais alors la racine de ce nombre, s'il n'est pas un carré parfait, ne serait pas un nombre entier; ce qui empêcherait d'avoir pour x^2 et y^2 des nombres entiers.

Exemples :

$$\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{16}};\quad \sqrt[7]{139\sqrt{3}+91\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}.$$

II. Newton a, le premier, traité cette question et donné une règle (*Arithmétique universelle*, t. II, p. 116-121, de la traduction de Beaudeux, 1802).

Euler a élevé des objections contre cette règle dans son mémoire intitulé : *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus* (Comm. Petrop., XIII, 1751). Le but du travail du célèbre professeur de Turin est de montrer que les objections sont fondées et à quoi elles tiennent.

PENSÉES DE D'ALEMBERT

sur divers sujets de mathématiques.

I. *Sections coniques.* La théorie des sections coniques doit être précédée d'un traité qui contiendra les principes généraux de l'application de l'algèbre aux lignes courbes. Ces

principes généraux consisteront : 1° à expliquer comment on représente, par une équation, le rapport des abscisses aux ordonnées ; 2° comment la résolution de cette équation fait connaître le cours de la courbe, ses différentes branches et ses asymptotes ; 3° à donner la manière de trouver par le *calcul différentiel* les tangentes, les points de maximum et de minimum ; 4° à enseigner comment on trouve l'aire des courbes par le *calcul intégral ;* par conséquent ce traité contiendra les règles du *calcul différentiel et intégral*, au moins celles qui peuvent être utiles pour abréger un traité des sections coniques. Quelques géomètres se récrieront peut-être ici sur l'emploi que nous voulons faire de ces calculs dans une matière où l'on peut s'en passer, mais nous les renvoyons à ce que nous avons dit sur ce sujet au mot Ellipse. Nous y avons fait voir par des exemples combien ces calculs sont commodes pour abréger les démonstrations et les solutions, et pour réduire à quelques lignes ce qui autrement occuperait des volumes. Nous avons donné d'ailleurs au mot Différentiel la métaphysique très-simple et très-lumineuse des nouveaux calculs, et quand on aura bien expliqué cette métaphysique, ainsi que celle de l'infini géométrique (*voy.* Infini), on pourra se servir d'*infiniment petit* et d'*infini* pour abréger les expressions et les démonstrations (*).

II. *Ellipse....* Pour démontrer que les parallélogrammes formés autour des deux diamètres conjugués sont égaux, imaginez un diamètre infiniment proche d'un des conjugués, et ensuite imaginez le conjugué à ce diamètre infiniment proche ; achevez les deux parallélogrammes, ou plutôt le quart de ces parallélogrammes, vous verrez à l'instant, et pour ainsi dire à l'œil, par le parallélisme des tangentes aux diamètres conjugués, que ces deux parallélogrammes infiniment proches sont égaux ; leur différence, s'il y en avait, ne pou-

(*) Géométrie, *Encyclopédie*, t. VII, p. 638, 1757.

vant être qu'infiniment petite du second ordre par rapport à eux. Donc, etc.

Pour démontrer maintenant que la somme des carrés des diamètres conjugués est constante, conservez la même figure, appelez a un des demi-diamètres, b son conjugué, $a+da$ le demi-diamètre infiniment proche de a, $b-db$ le demi-diamètre conjugué; il faut donc prouver que

$$a^2+b^2=a^2+2ada+b^2-2bdb \text{ ou } ada=bdb;$$

or, traçant du centre de l'ellipse et des rayons a, b deux petits arcs de cercle x, z, on verra d'abord évidemment que les deux quarts d'ellipse renfermés entre les demi-diamètres conjugués sont égaux, et qu'ainsi $ax=bz$; or x est à da et z est à db, comme le sinus de l'angle des diamètres est au cosinus du même angle. Donc $x:da::z:db$; donc, puisque $ax=bz$, on aura $ada=bdb$.

On objectera peut-être que ces deux démonstrations sont tirées de la considération des quantités infiniment petites, c'est-à-dire d'une géométrie transcendante supérieure à celle des sections coniques. Je réponds que les principes de cette géométrie sont simples et clairs, et qu'ils doivent être préférés dès qu'ils fournissent le moyen de démontrer plus aisément. En effet, pourquoi ne mettrait-on pas à la tête d'un traité des sections coniques des principes de *calcul différentiel*, lorsque ces principes simplifieront et abrégeront les démonstrations? J'ose dire que l'opinion contraire ne serait qu'un *préjugé* mal fondé; il y a cent raisons pour la détruire, et pas une pour la soutenir. Les principes de la géométrie infinitésimale étant applicables à tout, on ne saurait les donner trop tôt, et il est bien aisé de les expliquer nettement.

La manière dont nous venons de démontrer l'égalité des parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, a donné occasion à M. Euler de chercher les courbes qui peuvent avoir une pro-

priété semblable. Mémoire de Berlin, 1745. (Article ELLIPSE, *Encyclopédie*, V, 1755.)

Note. Parlant d'un certain problème d'hydrodynamique, Euler dit : Puisque ce problème a résisté à d'Alembert, la solution doit dépasser les bornes de l'esprit humain. Nous voyons que cet homme hors rang, illustre ami de Voltaire, et, à l'instar de ce puissant génie, défenseur intrépide de la raison et du bon sens, nous voyons qu'il conseillait il y a près d'un siècle l'introduction du calcul infinitésimal dans l'enseignement élémentaire ; et toutefois, en 1848, ce calcul, non-seulement n'est pas admis, mais est encore superstitieusement repoussé, à tel point que beaucoup de professeurs ignorent ce calcul, que le grand nombre l'oublie, et qu'une classe entière de savants, les médecins et chirurgiens, n'en entendent jamais parler et restent ainsi complétement étrangers aux lois dynamiques, qui occupent une place si importante dans le jeu des fonctions vitales. L'Université, devenue républicaine, modifiera-t-elle son système d'éducation nationale, si défectueux dans la partie scientifique, si stérile (*) dans la partie littéraire? Je l'espère peu. La commission formée pour réformer les hautes études l'entreprendrait, qu'elle n'y réussirait pas ; en France, il est plus facile de changer dix formes gouvernementales qu'une seule forme pédagogique. Des préjugés mensuellement *emargés* sont inexpugnables.

(*) Les langues mortes s'apprennent en lisant continuellement les bons auteurs d'un bout à l'autre, et en écrivant peu : c'est le contraire dans nos colléges. Les élèves écrivaillent sans cesse, lisent peu, et toujours fragmentairement. Deux années d'application suffisent pour savoir l'allemand, idiome très-difficile, et nous mettons dix années à ne pas apprendre le latin, langue comparativement très-facile. C'est que la division en classes de 7e, 6e, 5e, etc., excellente pour donner de l'emploi à un nombreux personnel, sert aussi à dépenser le temps de la manière la plus stérile du monde. Rendons grâces à la Providence de ce qu'elle s'est chargée d'apprendre à parler à nos enfants. L'Université se serait emparée sans conteste de cette besogne, et y aurait infailliblement appliqué son système de *classes*. J'ai la conviction que nos enfants seraient parvenus à l'âge de dix ans sans savoir parler

DISCUSSION

d'une conique donnée par une équation* enveloppe *ou aux ordonnées linéaires de Plücker* (*v.* p. 10), *et applications des problèmes sur les enveloppes des cordes de coniques.

—

I. *Théorème.* Soit $py+qx=1$ (1) l'équation d'une droite, et $ap^2+bpq+cq^2+dp+eq+f=0$ (2) la relation entre p et q, cette relation est l'équation enveloppe d'une conique.

Démonstration. Posons l'equation hexanome ordinaire d'une conique, γ étant l'angle des axes; pour que la droite (1) soit tangente à cette conique, et considérant que p et q sont les valeurs réciproques des coordonnées à l'origine, on doit avoir la relation

$$l'p^2-2npq+lq^2-2k'p-2kq+m=0 \quad (3) \quad \text{(t. II, p. 108).}$$

Or on peut identifier les deux équations (2) et (3), ce qui donne :

$$\frac{l}{m}=\frac{c}{f};\ \frac{l'}{m}=\frac{a}{f};\ \frac{2k'}{m}=-\frac{d}{f};\ \frac{2k}{m}=-\frac{e}{f};\ \frac{2n}{m}=\frac{b}{f}\ (4);$$

c. q. f. d.

II. *Problème.* Étant donnée l'équation enveloppe d'une conique, trouver l'espèce.

Solution. Soit (2) l'équation enveloppe donnée de la conique, on a les relations d'identité

$$A=\frac{k^2-ml}{4L};\quad C=\frac{k'^2-ml'}{4L};\quad B=\frac{-2(kk'+mn)}{4L}.$$

Substituant, au lieu de k, k', l, l', n leurs valeurs déduites des relations (4), il vient :

$$A = \frac{m^2(e^2-4cf)}{16f^2L};\ C = \frac{m^2(d^2-4af)}{16f^2L};\ B = -\frac{m^2(de-4bf)}{8f^2L};$$

d'où

$$B^2 - 4AC = \frac{m^4}{64f^4L^2}[(de-4bf)^2-(e^2-4cf)(d^2-4af)] =$$

$$= \frac{4m^4f}{64f^4L^2}[ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2-4ac)] = \frac{4m^4f}{64f^4L^2}L_1.$$

Cette expression permet de déterminer l'espèce de la conique.

1° Si $f=0$, c'est une parabole.

2° Si $L_1=0$ et b^2-4ac pas négatif, alors l'équation (2) est décomposable en facteurs rationnels, et chacun de ces facteurs a pour enveloppe un point (*v.* t. I, p. 491); si $L_1=0$ et $b^2-4ac<0$, l'équation ne représente rien. Si $d=e=f=b^2-4ac=0$, alors l'équation se réduit à un facteur carré, et l'équation représente un point double.

3° Si fL_1 est positif, la conique est une hyperbole, et si fL_1 est négatif, c'est une ellipse.

Observation. Nous avons désigné la fonction par L_1, parce que sa formation est analogue à celle de la fonction L dans l'équation hexanome ordinaire.

III. Si l'on désigne par x et y les coordonnées du centre,

on a : $$x = -\frac{e}{2f};\quad y = \frac{-d}{2f};$$

ainsi $dp + eq + 2f = 0$ est l'équation enveloppe du centre.

IV. *Problème.* Un triangle a deux sommets fixes sur une conique donnée ; le troisième sommet décrit une seconde courbe donnée dans le plan de la conique ; celle-ci est coupée par les côtés mobiles du triangle en deux points. Trouver l'équation enveloppe de la droite qui joint les deux points.

Solution. Désignons par $2r$ la longueur du côté du triangle inscrit dans la conique ; prenons ce côté pour axe des x, et son milieu pour origine, et une droite de direction quel-

conque pour axe des y ; soit $F(X, Y) = 0$ l'équation de la courbe donnée sur laquelle se meut le sommet mobile. Un calcul facile donne pour le système des deux côtés mobiles du triangle, l'équation suivante :

$$y^2(X^2 - r^2) - 2XYxy + Y^2x^2 + 2r^2Yy - r^2Y^2 = 0, \quad (1)$$

qui se vérifie d'ailleurs en faisant d'abord $x = X$ et $y = Y$, et ensuite en faisant $y = 0$, $x = \pm r$, la conique qui passe par les sommets fixes a nécessairement une équation de cette forme :

$$Ay^2 + Bxy + x^2 + Dy - r^2 = 0; \quad (2)$$

A, B, D sont trois constantes.

Retranchant l'équation (1) de l'équation (2) multipliée par y^2 et ôtant du reste le facteur commun, il vient :

$$y(Ay^2 - X^2 + r^2) + Yx(BY + 2X) + Y(DY - 2r^2) = 0; \quad (3)$$

le facteur ôté y correspond à l'équation $y = 0$, équation du côté fixe, corde commune au triangle et à la conique ; et l'équation (3) correspond à la seconde corde commune et variable ; donnons à cette dernière équation la forme $py + qx = 1$, on obtient :

$$Y(B + Dq) + 2X - 2qr^2 = 0, \quad (4)$$

$$Y^2(A + Dp) - X^2 - 2pr^2Y + r^2 = 0. \quad (5)$$

Éliminant X et Y entre ces deux équations et l'équation $F(X, Y) = 0$, on obtient une relation entre p et q, qui est l'équation enveloppe cherchée.

V. *Problème*. Mêmes données qu'au problème précédent. Trouver la courbe telle que l'enveloppe de la corde mobile soit une conique.

Solution. On a :

$$p = \frac{AY^2 - X^2 \pm r^2}{Y(2r^2 - DY)}; \quad q = \frac{BY^2 + 2XY}{Y(2r^2 - DY)}.$$

Pour que l'enveloppe soit celle d'une conique, on doit avoir :

$$ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eqtf = 0\,;$$

mettant à la place de p et de q leurs valeurs respectives, on parvient à une équation du 4ᵉ degré en X et Y, à laquelle il ne manque que des termes en X^3 et en X pour être complète. Or elle ne renferme que cinq indéterminées ; elle ne saurait donc représenter une courbe quelconque de son espèce.

VI. *Théorème.* Mêmes données. Si la ligne donnée est une droite, l'enveloppe de la corde mobile est une conique.

Démonstration. Éliminant Y entre les équations (4) et (5), il vient, réductions faites :

$$\left.\begin{array}{l} X^2[4(A+Dp)-(B+Dq)^2]+ \\ +4Xr^2(Bp-2Aq-Dpq)+4qr^4[Aq-Bp]+r^4[B+Dq]^2 \end{array}\right\}=0. \quad (6)$$

L'axe des y ayant une direction quelconque, on peut supposer que cette direction est parallèle à celle de la droite donnée ; alors X est une quantité constante, et l'équation étant du second degré en p et q est l'équation enveloppe d'une conique. C. q. f. d.

Observation. Éliminant X entre les deux équations (4) et (5), il vient cette équation en Y :

$$q^2[2r^2-DY]^2+4pY[2r^2-DY]-2BYq[2r^2-DY]+ \\ +Y^2[B^2-4A]-2r^2=0.$$

La droite donnée devenant parallèle à l'axe des x ; alors Y est constant, et cette équation devient encore une équation enveloppe d'une conique, dont l'espèce est indiquée par le signe du terme tout connu. Or l'on a :

$$a=b=0 \quad \text{et} \quad c=(2r^2-DY)^2 \text{ (Probl. II)}\,;$$

si $2r^2-DY=0$, alors la droite donnée est la polaire de l'origine, et l'équation (3) indique que la corde mobile passe constamment par l'origine ; ce qui est évident *à priori*.

VII. *Théorème.* Mêmes données. Si la ligne donnée est une

seconde conique ayant avec la première la corde fixe en commun, l'enveloppe de la corde mobile est une troisième conique, ayant avec la seconde conique deux points de contact aux extrémités de la corde fixe.

Démonstration. Deux coniques ont toujours six cordes en commun, analytiques ou réelles ; il y en a toujours au moins deux dont les directions sont réelles ; or, ici, les deux coniques ayant une corde fixe réelle en commun, il en existe encore une seconde ; la première étant prise pour axe des x, donnons à l'axe des y même direction que la seconde corde ; l'équation de la première conique étant comme dessus,

$$Ay^2 + Bxy + x^2 + Dy - r^2 + 0 ,$$

celle de la seconde conique est :

$$AY^2 + B'XY + X^2 + D'Y - r^2 = 0. \qquad (7)$$

Ainsi la seconde corde a pour équation $x(B-B')+D-D'=0$; les équations (4) et (5) deviennent :

$$Y(B + Dq) + 2X = 2qr^2,$$
$$DpY - B'X = D' + 2pr^2 ;$$

d'où

$$Y = \frac{2(B'r^2q + 2r^2p + D')}{B'Dq + 2Dp + BB'} ; \qquad X = \frac{-DD'q - 2Br^2p - BD'}{B'Dq + 2Dp + BB'} .$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient une relation du second degré entre p et q ; donc la corde mobile enveloppe une conique.

Observation. Cette démonstration n'est pas applicable à deux coniques *semblables* ayant une corde en commun, parce que la seconde corde est située *à l'infini*. Toutefois les projections *centrales* de ces courbes semblables ne sont plus semblables. Le théorème subsiste donc pour les projections ; il subsiste donc aussi évidemment pour les courbes projetées.

VIII. *Théorème.* Soient deux coniques O et O' ayant deux points de contact en A et A' ; si l'on mène à la conique inté-

rieure O une tangente rencontrant la conique O' en deux points B et B', le lieu géométrique du point d'intersection des droites AB, A'B' est une troisième conique passant par les points A et A'.

Démonstration. C'est l'inverse du théorème VII.

IX. Soient deux coniques O et O' ayant deux tangentes communes; menons une tangente quelconque à la conique O, rencontrant les deux tangentes fixes en deux points A et A'; par chacun de ces points on mène une tangente à la conique O'; le lieu géométrique de l'intersection de ces tangentes est une conique touchée par les deux tangentes fixes.

Démonstration. Par la théorie des polaires réciproques.

Tm.

RAPPORT SEGMENTAIRE PROJECTIF SPHÉRIQUE.

(*Voir* t. VI, p. 86.)

—

Théorème. Soit un faisceau de grands cercles partant du point A et coupé par les transversales BCDE... et B'C'D'E'...; formons sur l'arc BCDEF un rapport segmentaire, qui serait projectif si les segments étaient des droites, et le rapport analogue sur l'arc B'...F'...; si à chaque segment on substitue le cosinus de la moitié de ce segment multiplié par le sinus de la moitié de l'aire du triangle dont ce segment est la base, les deux rapports sont égaux.

Démonstration. Cette égalité est fondée sur l'équation

$$\text{Sin } A = \frac{\sin\frac{s}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}; \quad \text{(p. 17)}$$

s est l'aire du triangle sphérique ABC.

THÉORÈME SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ,

d'après M. F. Heinen (Crelle, t. XVIII, p. 176, 1838).

—

I. *Lemme.* Soient A et B deux points matériels, a et b leurs poids, et C leur centre de gravité, P un troisième point, et soient menées les droites PA, PC, PB, on a

$$a.\overline{PA}^2 + b.\overline{PB}^2 = (a+b)\overline{PC}^2 + \frac{ab}{a+b}.\overline{AB}^2.$$

II. *Lemme.* Soient A_1, A_2... A_n; n point matériel; a_1, a_2... a_n leurs poids respectifs; S_2 le centre de gravité de A_1, A_2, et s_2 le poids; S_3 le centre de gravité de A_3, S_2, et s_3 le poids, etc., et enfin S_n le centre de gravité de S_{n-1} et A_n, et s_n le poids; de sorte que $s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$. D'un point quelconque P, menons les droites PA_1, PA_2... PA_n, PS_2, PS_3... PS_n, on aura :

$$\left.\begin{aligned} a_1 PA_1^{\ 2} + a_2 PA_2^{\ 2} + \ldots a_n PA_n^{\ 2} = \frac{a_2 . a_1}{s_2}\overline{A_1 A_2}^2 + \\ + \frac{a_3 . s_2}{s_3}\overline{S_2 A_3}^2 + \ldots \frac{a_n . s_{n-1}}{s_n}\overline{S_{n-1} A_n}^2 + s_n PS_n^{\ 2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ce lemme est une conséquence du précédent.

III. *Théorème.* Même notation que le lemme précédent.

Dans quelque ordre qu'on combine les poids successivement pour parvenir au centre de gravité s_n du système, le second membre de la précédente équation, moins le dernier terme, est une quantité constante.

Démonstration. Supposons que le point P coïncide avec le point S_n, alors PS_n devient nul et le premier membre de l'équation (1) donne la quantité constante

$$a^1\overline{S_nA_1}^2 + a_2\overline{S_nA_2}^2 + \ldots a_n\overline{S_nA_n};$$

donc, etc.

Corollaire. Faisant $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = 1$, il vient :

$$\overline{S_nA_1}^2 + \overline{S_nA_2}^2 + \overline{S_nA_n}^2 = \frac{1}{2}A_1A_2^{\ 2} + \frac{2}{3}S_2A_3 + \ldots \frac{n-1}{n}S_{n-1}A_n^{\ 2}.$$

IV. *Théorème.* Soit $\Sigma_1^n a_p.(PA_p)^2 = E$; $\Sigma a_p.a_q.\overline{A_pA_q}^2 = Q$; p et q ont toutes les valeurs prises dans la suite $1, 2, 3 \ldots n$; A_pA_q est la droite qui réunit A_p à A_q; on a :

$$[s_n.PS_n]^2 = s_nE - Q. \qquad (2)$$

Démonstration. Plaçons le point P successivement en A_1, $A_2 \ldots A_n$, l'équation donne :

$$a_2A_1A_2^2 + \ldots a_nA_1A_n^2 = a_1S_nA_1^2 + a_2S_nA_2^2 + \ldots a_nS_nA_n + s_nA_1S_n^2,$$
$$a_1A_2A_1^2 + \ldots a_nA_2A_n^2 = a_1S_nA_1^2 + a_2S_nA_2^2 \ldots\ldots + s_nA_2S_n^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1A_nA_1^2 + \ldots a_{n-1}A_nA_{n-1}^2 = a_1S_nA_1^2 \ldots\ldots\ldots + s_nA_nS_n^2;$$

multipliant la première équation par a_1, la seconde par a_2, etc., il vient, conformément à la notation :

$$Q = s_n[E - s_n\overline{PS_n}^2];$$

d'où l'on déduit l'équation (2).

Observation. Au moyen de cette formule, on déduit les distances du centre de gravité à trois points du système, en fonction de données du système. Cette formule a été démontrée analytiquement par Lagrange, *Théorie des fonctions*, p. 362, et *Mécanique analytique*, t. I, sect. III, § 20; et par Laplace, *Mécanique céleste*, t. II, chap. III, § 15.

TABLEAU

s signes des lignes trigonométriques dans les quatre quadrants de la circonférence, d'après Henri (Maurice), ingénieur géographe.

AD.	IIe QUADRANT.	IIIe QUADRANT.	IVe QUADRANT.
s	$\sin(1q+a)=+\cos a$	$\sin(2q+a)=-\sin a$	$\sin(3q+a)=-\cos a$
éca	$\text{coséc}(1q+a)=+\text{séc}\,a$	$\text{coséc}(2q+a)=-\text{coséc}\,a$	$\text{coséc}(3q+a)=-\text{séc}\,a$
a	$\cos(1q+a)=-\sin a$	$\cos(2q+a)=-\cos a$	$\cos(3q+a)=+\sin a$
s	$\text{séc}(1q+a)=\ \text{coséc}\,a$	$\text{séc}(2q+a)=-\text{séc}\,a$	$\text{séc}(3q+a)=+\text{coséc}\,a$
ga	$\text{tang}(1q+a)=-\cot a$	$\text{tang}(2q+a)=+\text{tang}\,a$	$\text{tang}(3q+a)=-\cot a$
s	$\cot(1q+a)=-\text{tang}\,a$	$\cot(2q+a)=+\cot a$	$\cot(3q+a)=-\text{tang}\,a$

MOMENTS D'INERTIE

n arc de cercle et d'une surface sphérique par rapport à un point, d'après M. Lobatto.

—

l. L'équation d'un cercle, axes rectangulaires, est $+x^2+p=0$, où p est une fonction linéaire en x, y. Soient α et β les coordonnées du point fixe par rapport uel on prend les moments d'inertie, et z étant la distance n point x, y de la circonférence au point fixe, on a $=x^2+y^2+q$, où q est une fonction linéaire en x, y, α, β; $z^2=q-p$; posons $q-p=0$, c'est l'équation d'une ite. Désignons par t la perpendiculaire abaissée du point y sur cette droite. Or $q-p=mt$, m est une constante.

Donc $z^2 = mt$, et $\int z^2 ds = m \int t ds$; ds est l'arc élémentaire. Désignant la longueur métrique de l'arc par s, et la distance de son centre de gravité à la droite par T, on aura :

$$\int t ds = sT ; \quad \text{donc} \quad \int z^2 ds = msT. \qquad \text{C. q. f. t.}$$

2. Le même genre de raisonnement donne le moment d'inertie d'une surface sphérique ; la droite est remplacée par un plan.

GRAND CONCOURS DE 1848. (*Voir* t. VI, p. 294.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques spéciales.

Soit, dans le plan d'une ellipse donnée, une droite quelconque TS ; par le centre C de l'ellipse on mène le diamètre ACB conjugué à la direction de cette droite, et qui va la couper au point O ; on prolonge ensuite la ligne OC d'une longueur OM, telle que le rectangle $OC \times CM = CA^2$.

On suppose que la droite TS se meuve de manière à être toujours tangente à une courbe donnée, et l'on demande quelle sera la courbe décrite par le point M ?

Mathématiques élémentaires.

Soient données dans le plan d'un cercle deux droites parallèles l et l'. Par un point M pris sur l'une, on mène deux tangentes au cercle qui déterminent sur l'autre un segment AB ; on joint le point M au point I, milieu de ce segment, et l'on demande de démontrer que toutes les droites, telles que MI, vont concourir en un même point.

Note. Les études ont souffert de fréquentes interruptions,

c'est probablement ce qui a dicté le choix de si faciles questions. Mais pourquoi la question élémentaire est-elle comparativement la plus difficile?

MÉMOIRE DE M. JACOBI

sur l'élimination. (Suite) (*Voir* p. 17.)

—

X.

Pour les diverses valeurs de r, il existe entre les fonctions multiplicatrices M_r, N_r diverses relations que nous allons examiner.

Considérons d'abord les fonctions multiplicatrices M_r, N_r dans lesquelles $r \leqq n-2$; il suit des équations (20), en omettant les termes qui se détruisent :

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x) -$$
$$-(A_{r+1}b_1 + A_{r+2}b_2 + \dots + A_{r+n}b_n).$$

Mais les équations (19) donnent :

$$A_r b_0 + A_{r+1}b_1 + A_{r+2}b_2 + \dots + A_{r+n}b_n = 0.$$

Donc

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots b_1 x + b_0) = A_r \varphi x,$$

on trouve de la même manière :

$$xN_r - N_{r-1} = A_r f(x).$$

Soit maintenant $r \leqq n$; si, dans les équations (23), à la place de $2n-r-1$, on met successivement r et $r+1$, il vient, toute réduction faite :

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) -$$
$$-(A_{r-1}b_{n-1} + A_{r-2}b_{n-2} + A_{r-n}b_0)x.$$

Or les équations (19) donnent :

$$A_{r-n}b_0+A_{r-n+1}b_1+A_{r-n+2}b_2+\ldots+A_{r-1}b_{n-1}+A_r b_n=0;$$

d'où, comme ci-dessus,

$$-(xM_r-M_{r+1})=A_r\varphi(x);$$

et de même,

$$xN_r-N_{r+1}=A_r f(x).$$

Posons enfin $r=n-1$ dans (20) et $r=n$ dans (23), on trouve :

$$\begin{aligned}-(xM_{n-1}-M_n)=\;&b_0A_{n-1}+\\&+x(b_1A_{n-1}+b_0A_{n-2}+b_1A_{n-1}+b_2A_n+\ldots+b_nA_{2n-2}),\\&+x^2(b_2A_{n-1}+b_1A_{n-2}+b_0A_{n-3}+b_2A_{n-1}+b_3A_n+\ldots+b_nA_{2n-3}),\\&\;x^3(b_3A_{n-1}+\ldots+b_0A_{n-4}+b_3A_{n-1}+\ldots+b_nA_{2n-4}),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\;x^{n-1}(b_{n-1}A_{n-1}+\ldots+b_0A_0+b_{n-1}A_{n-1}+b_nA_n),\\&+x^nb_nA_{n-1};\end{aligned}$$

et à l'aide des équations (9),

$$-(xM_{n-1}-M_n)=A_{n-1}\varphi(x);$$

et de la même manière,

$$xN_{n-1}-N_n=A_{n-1}f(x);$$

d'où il résulte que r *désignant un des nombres* 0, 1, 2, 3.... $2n-3$, on a :

$$-(xM_r-M_{r+1})=A_r\varphi x;\quad xN_r-N_{r+1}=A_r f(x).\quad (27)$$

Des équations (27) on déduit :

$$\begin{aligned}-(x^mM_r-x^{m-1}M_{n+1})&=A_rx^{m-1}\varphi(x),\\-(x^{m-1}M_{r+1}-x^{m-2}M_{r+2})&=A_{r+1}x^{m-2}\varphi(x),\\-(x^{m-2}M'_{r+2}-x^{m-3}M_{r+3})&=A_{r+2}x^{m-3}\varphi(x),\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\-(xM_{r+m-1}-M_{r+m})&=A_{r+m-1}\varphi(x).\end{aligned}$$

On tire de (27) des équations analogues en N.

Effectuant l'addition, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} -(x^m\mathrm{M}_r-\mathrm{M}_{r+m})=(\mathrm{A}_r x^{m-1}+\mathrm{A}_{r+1}x^{m-2}+\ldots+\mathrm{A}_{r+m-1})\varphi(x) \\ x^m\mathrm{N}_r-\mathrm{N}_{r+m}=(\mathrm{A}_r x^{m-1}+\mathrm{A}_{r+1}x^{m-2}+\ldots+\mathrm{A}_{r+m-1} \end{array}\right\}(28)$$

Soit, par exemple, $r=0$; $m=2n-1$, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} (x^{2n-1}\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_{2n-1})=(\mathrm{A}_0x^{2n-2}+\mathrm{A}_1x^{2n-3}+\mathrm{A}_2x^{2n-4}+\ldots+\mathrm{A}_{2n-2})\varphi(x) \\ x^{2n-1}\mathrm{N}_0-\mathrm{N}_{2n-1}=(\mathrm{A}_0x^{2n-2}+\mathrm{A}_1x^{2n-3}+\mathrm{A}_2x^{2n-4}+\ldots+\mathrm{A}_{2n-2})f(x) \end{array}\right\}(29)$$

Ensuite, les équations (27) donnent :

$$-(x\mathrm{M}_r-\mathrm{M}_{r+1})=\mathrm{A}_r\varphi(x)\ ;\ -(x\mathrm{M}_{r+1}-\mathrm{M}_{r+2})=\mathrm{A}_{r+1}\varphi(x)\ ;$$

et de même pour N_r; l'on en tire :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_{r+1}x\mathrm{M}_r-(\mathrm{A}_{r+1}+\mathrm{A}_rx)\mathrm{M}_{r+1}+\mathrm{A}_r\mathrm{M}_{r+2}=0, \\ \mathrm{A}_{r+1}x\mathrm{N}_r-(\mathrm{A}_{r+1}+\mathrm{A}_rx)\mathrm{N}_{r+1}+\mathrm{A}_r\mathrm{N}_{r+2}=0. \end{array}\right\}(30)$$

Enfin, comme $\mathrm{M}_rf(x)+\mathrm{N}_r\varphi(x)=\mathrm{L}x^r$; $\mathrm{M}_sf(x)+\mathrm{N}_s\varphi(x)=$ $=\mathrm{L}x^s$, on a :

$$\mathrm{M}_r\mathrm{N}_s-\mathrm{M}_s\mathrm{N}_r=\frac{\mathrm{L}}{f(x)}(x^r\mathrm{N}_s-x^s\mathrm{N}_r)=\frac{\mathrm{L}}{\varphi(x)}(x^r\mathrm{M}_s-x^s\mathrm{M}_r)\ ; \quad (31)$$

d'où, de (27), (28), (29), l'on déduit :

$$\mathrm{M}_{r+1}\mathrm{N}_s-\mathrm{M}_r\mathrm{N}_{s+1}=\mathrm{L}\mathrm{A}_rx_r\ ; \quad (32)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}_{r+m}\mathrm{N}_r-\mathrm{M}_r\mathrm{N}_{r+m}=\mathrm{L}(\mathrm{A}_rx^{r+m-1}+\mathrm{A}_{r+1}x^{r+m-2}+\ldots \\ \qquad \ldots+\mathrm{A}_{r+m-1}x^r)\ ; \end{array}\right\}(33)$$

$$\mathrm{M}_{2n-1}\mathrm{N}_0-\mathrm{M}_0\mathrm{N}_{2n-1}=\mathrm{L}(\mathrm{A}_0x^{2n-2}+\mathrm{A}_1x^{2n-3}+\ldots+\mathrm{A}_{2n-2}). \quad (34)$$

XI.

Ayant calculé les expressions de la forme $a_rb_s-a_sb_r$, il est facile de trouver par des additions successives les expressions m_r ou les coefficients $a_{r,s}$; les expressions $a_rb_s-a_sb_r$, s et r étant des nombres de la suite 0, 1, 2... n, sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$.

En effet, on tire des équations (1) :

$$m_{r-1}-xm_r=a_r\varphi(x)-b_rf(x)\ ; \quad (35)$$

faisant $r=0$ et $r=n$, et rejetant les expressions m_{-1}, m_n, il vient :

$$-xm_0=a_0\varphi(x)-b_{(0)}f(x)\ ; \quad (36)$$

Posons pour abréger $(a_rb_s)=a_rb_s-a_sb_r$, et soit :

$$(a_{n-1}b_0)+(a_{n-1}b_1)x+(a_{n-1}b_2)x^2\ldots+(a_{n-1}b_{n-2})x^{n-2}=u_{n-2}$$
$$(a_{n-2}b_0)+(a_{n-2}b_1)x+(a_{n-2}b_2)x^2\ldots+(a_{n-2}b_{n-3})x^{n-3}=u_{n-3}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(a_2b_0)+(a_2b_1)x=u_1$$
$$(a_1b_0)=u_0;$$

soit ensuite

$$\mu_r=\alpha_{0,r}+\alpha_{1,r}x+\alpha_{2,r}x^2\ldots+\alpha_{r,r}x^r,$$

et désignons par $[x\mu_r]$ le produit $x\mu_r$, les deux derniers termes étant omis, on aura, d'après (1) :

$$\mu_{n-1}=m_{n-1}=(a_nb_0)+(a_nb_1)x+(a_nb_2)x^2+\ldots+(a_nb_{n-1})x^{n-1}$$
$$\mu_{n-2}=[x\mu_{n-1}]+u_{n-2}$$
$$\mu_{n-3}=[x\mu_{n-2}]+u_{n-3}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\mu=[x\mu_n]+u_1$$
$$\mu_0=u_0;$$

ayant trouvé de cette manière μ_{n-1}, μ_{n-2}, on aura de suite les expressions mêmes m_{n-1}, $m_{n-2}\ldots m$; les termes manquants étant suppléés par la formule $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$.

En substituant dans la formule (35) les expressions m_r, m_{r-1}, $f(x)$ et $\varphi(x)$, et comparant les puissances de x, il vient :

$$\alpha_{r-1,s}-\alpha_{r,s-1}=(a_rb_s); \tag{37}$$

dans cette formule, si l'on fait $r=n$ ou $r=0$, le terme $\alpha_{r,s-1}$ ou $\alpha_{r-1,s}$ doit être omis.

Combinant avec la formule (35) les deux autres où r est augmenté d'une unité et ensuite de deux unités, et éliminant $f(x)$ et $\varphi(x)$ entre les trois équations, il vient :

$$\left.\begin{aligned}0=(a_{r+1}b_{r+2})(m_{r-1}-xm_r)+(a_{r+2}b_r)(m_r-xm_{r+1})+\\+(a_rb_{r+1})(m_{r+1}-xm_{r+2})\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

dans cette formule, si $r=0$, $r=n-2$, les termes multipliés par m_{-1}, m_n doivent être rejetés.

XII.

Outre la relation $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$, il doit y avoir encore d'autres relations entre ces quantités, car ces quantités $\alpha_{r,s}$ sont au nombre de n^2 ou au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$ si nous considérons $\alpha_{r,s}$ et $\alpha_{s,r}$ comme les mêmes, et toutes dépendent seulement des $2n+2$ quantités a_r, b_r. Les nombres de ces quantités doivent ainsi être diminués de *trois*; car les binomes $a_rb_s-a_sb_r$, et aussi les quantités $\alpha_{r,s}$ qui en dépendent, ne changent pas en remplaçant a_r, b_r par $\gamma a_r+\epsilon b_r$, $\gamma' a_r+\epsilon' b_r$; γ, ϵ, γ', ϵ' désignant des quantités arbitraires entre lesquelles existe la relation $\gamma\epsilon'-\gamma'\epsilon=1$. On voit que trois des quantités a_r, b_r peuvent être prises arbitrairement; aussi les coefficients $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$ au nombre de $\frac{n^2+n}{2}$ dépendent seulement $2n-1$ quantités; ainsi il y a entre les quantités $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$ des relations au nombre de :

$$\frac{n^2+n}{2}-2n+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Un théorème trouvé ci-dessus tient en quelque sorte lieu de ces relations, savoir que $A_{r,s}=A_{r+s}$, et les termes en $A_{r,s}$ sont formés, d'une certaine manière, des quantités $\alpha_{r,s}$; car toutes ces quantités sont en même nombre que les quantités $\alpha_{r,s}$ et dépendent aussi de $2n-1$ quantités; mais on peut établir des relations encore plus simples entre les quantités $\alpha_{r,s}$ que celles qui sont données par ce théorème.

Omettant certains théorèmes ou connus ou que nous avons démontrés ailleurs (voir *Mémoire sur deux fonctions homogènes quelconques*, t. XII), désignons par le type

$$\alpha\left\{\begin{matrix} r_0 r_1 r_2 \ldots . r_m \\ s_0 s_1 s_2 \ldots . s_m \end{matrix}\right\}$$

l'agrégation de 1.2.3...m termes, que nous avons désignée ci-dessus § III, par le type

$$\Sigma \pm \alpha_{r_0, s_0} \alpha_{r_1, s_1} \alpha_{r_2, s_2} \ldots \alpha_{r_m, s_m};$$

ainsi, d'après le § IV, on a :

$$L = \alpha\left\{\begin{matrix} 0\,1\,2 \ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots n-1 \end{matrix}\right\}.$$

Si dans cette expression de L on rejette dans les indices supérieurs 0, 1, 2... n, et s dans les indices inférieurs, on obtient l'expression $A_{r,s}$ (*voir* équations 6).

Le signe de cette expression est déterminé en ce que $\alpha_{r,s} A_{r,s}$ doit faire partie de L ; on aura réciproquement (*voir* les équations 12 et 13) :

$$L^{n-1} = A\left\{\begin{matrix} 0\,1\,2 \ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots n-1 \end{matrix}\right\};$$

dans cette expression, si on rejette r dans les indices supérieurs, et s dans les indices inférieurs, il vient :

$$L^{n-2} \alpha_{r,s};$$

mais si on rejette r, r' dans les indices supérieurs, et s, s' dans les indices inférieurs, on obtient :

$$L^{n-3} \alpha\left\{\begin{matrix} rr' \\ ss' \end{matrix}\right\},$$

et généralement si dans l'expression

$$A\left\{\begin{matrix} 0\,1\,2 \ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots n-1 \end{matrix}\right\}$$

on omet r, r'... $r^{(m-1)}$ dans les indices supérieurs, et s, s'... $s^{(m-1)}$ dans les indices inférieurs, on obtient :

$$L^{n-(m+1)} \alpha\left\{\begin{matrix} rr' \ldots r^{m-1} \\ ss' \ldots s^{m-1} \end{matrix}\right\}.$$

Soient donc $r, r' \dots r^{(n-1)}$ et $s, s' \dots s^{(n-1)}$, tous les nombres 0, 1, 2... $n-1$, écrits dans un ordre quelconque, on aura :

$$A \left\{ \begin{matrix} r^{(m)}, r^{(m+1)} \dots r^{(n-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)} \dots s^{(n-1)} \end{matrix} \right\} = L^{n-(m+1)} \alpha \left\{ \begin{matrix} r, r' \dots r^{(m-1)} \\ s, s' \dots s^{(m-1)} \end{matrix} \right\}; \quad (39)$$

les expressions de cette forme

$$\alpha' \left\{ \begin{matrix} r, r' \dots r^{(m)} \\ s, s' \dots s^{(m)} \end{matrix} \right\}, \quad A \left\{ \begin{matrix} r, r' \dots r^{(m)} \\ s, s' \dots s^{(m)} \end{matrix} \right\}$$

restent les mêmes; les deux systèmes d'indices, supérieur et inférieur, s'échangent entre eux, car $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$ et $A_{r,s} = A_{s,r}$. Ensuite comme $A_{r,s}$ ne change pas, un indice étant augmenté et l'autre diminué d'une unité, il s'ensuit que l'expression

$$A \left\{ \begin{matrix} r^{(m)}, r^{(m+1)} \dots r^{(n-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)} \dots s^{(n-1)} \end{matrix} \right\}$$

ne changera pas si tous les indices d'un système étant augmentés d'une unité, ceux de l'autre système sont chacun diminués d'une unité; et pour que cette propriété puisse subsister, il faut que l'indice le plus élevé soit au-dessous de $n-1$, et l'indice le moins élevé au-dessus de 0; d'où *vice versa*, dans l'expression

$$\alpha \left\{ \begin{matrix} rr' \dots r^{(m-1)} \\ ss' \dots s^{(m-1)} \end{matrix} \right\},$$

dans un des systèmes, doit se trouver l'indice $n-1$, et dans l'autre 0.

On conclut donc de (39) : si l'expression

$$\alpha \left\{ \begin{matrix} rr' \dots r^{(m-1)} \\ ss' \dots s^{(m-1)} \end{matrix} \right\}$$

renferme dans l'un des systèmes l'indice $n-1$ et dans l'autre 0, elle ne change pas en augmentant d'une unité tous les indices d'un système, et diminuant d'une unité les indices de l'autre système; dans ce cas, $n-1$ augmenté devient 0,

et 0 diminué devient $n-1$; on peut représenter cette propriété des coefficients $\alpha_{r,s}$ par cette équation :

$$\pm\alpha\begin{Bmatrix} r', r'' \dots r^{(m-1)}, n-1 \\ s', s'' \dots s^{(m-1)}, 0 \end{Bmatrix} = \alpha\begin{Bmatrix} r'+1, r''+1', r^{(m-1)}, 0 \\ s'+1, s''+1, s^{(m-1)}, n-1 \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Pour déterminer le signe, il faut observer que l'équation (40) doit devenir identique entre les quantités $a_r b_s$ au moyen de la formule (37); ainsi, si les termes de l'expression (40) sont :

$$+\alpha_{r',s'}\alpha_{r'',s''}\dots\alpha_{r^{(m-1)},s^{(m-1)}}\alpha_{n-1,0},$$

$$+\alpha_{r'+1,s'-1}\alpha_{r''+1,s''-1}\dots\alpha_{r^{(m-1)}+1,s^{(m-1)}+1}\alpha_{0,n-1},$$

on en conjecture facilement qu'il faut prendre le signe $+$ si $m-1$ est pair, et le signe $-$ lorsque $m-1$ est impair.

Si $m=2$, il suit de la formule générale (40) :

$$\alpha_{n-1,0}\alpha_{r,s} - \alpha_{n-1,s}\alpha_{r,0} = \alpha_0\alpha_{r+1,s-1} - \alpha_{0,s-1}\alpha_{r+1,n-1}; \quad (41)$$

ce qu'on vérifie facilement par la substitution des valeurs :

$$\alpha_{n-1,r} = \alpha_{r,n-1} = (a_n b_r)$$

$$\alpha_{0,r} = \alpha_{r,0} = -(a_0 b_{r+1})$$

$$\alpha_{r,s} = \alpha_{r+1,s-1} = (a_{r+1} b_s);$$

ces substitutions faites, l'équation (41) devient :

$$(a_n b_0)(a_{r+1} b_s) + (a_n b_s)(a_0 b_{r+1}) = (a_0 b_s)(a_n b_{r+1}). \quad (42)$$

Ces trois produits étant développés, donnent une identité.

(*La suite prochainement.*)

THEORÈME DE STATIQUE.

PAR E. CATALAN.

—

THÉORÈME. *La fonction des forces, désignée habituellement par* LX + MY + NZ, *représente le sextuple de la somme des*

tétraèdres ayant pour arêtes opposées les droites qui représentent en grandeur et en direction les forces P, P', P'', ... *ces droites étant prises deux à deux.*

Nommons x, y, z les coordonnées rectangulaires du point d'application de la force P, et α, β, γ les angles que fait avec les trois axes la direction de cette force. Nous aurons

$$X=\Sigma P\cos\alpha,\quad Y=\Sigma P\cos\beta,\quad Z=\Sigma P\cos\gamma,$$
$$L=\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta),\quad M=\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma),$$
$$N=\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha),$$
$$\text{et } V=LX+MY+NZ$$
$$=(\Sigma P\cos\alpha).\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)$$
$$+(\Sigma P\cos\beta)\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)$$
$$+(\Sigma P\cos\gamma)\,\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha).$$

D'abord, la partie de V qui se rapporte uniquement à la force P est

$$P^2[(y\cos\gamma-z\cos\beta)\cos\alpha+(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\cos\beta$$
$$+(x\cos\beta-y\cos\alpha)\cos\gamma]\,;$$

quantité nulle d'elle-même. De même pour les parties de la fonction V qui proviennent des forces P', P'' prises *isolément.*

En second lieu, la partie de V qui résulte de la combinaison de deux forces différentes P et P' a pour valeur :

$$PP'[(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')\cos\alpha+(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')\cos\beta$$
$$+(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')\cos\gamma]+PP'[(y\cos\gamma-z\cos\beta)\cos\alpha'$$
$$+(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\cos\beta'+(x\cos\beta-y\cos\alpha)\cos\gamma']$$
$$=PP'[(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-$$
$$\cos\gamma'\cos\alpha)+(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)]$$

Or, il est facile de reconnaître que la quantité entre parenthèses représente le produit de la plus courte distance d des droites P, P' par le sinus de l'angle formé par ces droites ; donc

$$V=\Sigma PP'd\sin(P,\,P').$$

Enfin, l'on sait que le tétraèdre qui aurait P, P' pour arêtes opposées, a pour volume $\frac{1}{6}$ PP'd sin (P,P'). Le théorème est donc démontré.

Corollaire. *Si deux systèmes de forces se font équilibre, la somme des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux comme arêtes opposées, est équivalente à la somme des tétraèdres construits sur les forces du second système.*

En effet, soient X, Y, Z, L, M, N les composantes et les moments relatifs au premier système, et soient X', Y', Z', L', M', N' les mêmes quantités relativement au second système. Les six équations d'équilibre deviennent ici évidemment

$$X+X'=0,\ Y+Y'=0,\ Z'+Z'=0,$$
$$L+L'=0,\ M+M'=0,\ N+N'=0$$

Conséquemment, LX+MY+NZ=L'X'+M'Y'+N'Z' (1).

Note. Le célèbre mémoire de M. Minding (V, p. 185 au bas) est connu depuis longtemps en France ; il est déjà cité dans les Comptes rendus 1835, 2ᵉ s., p. 282, et en 1837, d'après cette mention, par M. Chasles (*Hist. des méthodes*, p. 535); mais écrit en allemand, le contenu est toujours inconnu. On y trouve le beau théorème qu'on vient de lire : je crois même que ses 172 équations épuisent toutes les interprétations qu'on peut déduire des équations d'équilibre. On sait que M. Möbius a travaillé sur le même thème, et dans sa *Statique*, ouvrage ex-professo, et dans un mémoire sur la composition des rotations infiniment petites, inséré dans le Journal de Crelle (XVIII, p. 189, 1838). En voici quelques théorèmes :

1° Lorsque quatre forces sont en équilibre, toute droite qui rencontre trois des forces rencontre la quatrième. Cette

(*) M. Chasles est arrivé à ce corollaire, et à un grand nombre de théorèmes très-élégants, dans un mémoire publié dans le Journal de Liouville, tome XII, page 213.

proposition est connue : on m'a même dit qu'elle a été professée par M. Richard, dans le cours d'une si haute instruction qu'il fait depuis longues années au collége Louis-le-Grand (1).

3° Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que *six*, il est toujours possible de trouver des forces, lesquelles agissant suivant ces droites se fassent équilibre ; lorsque le nombre de droites est moindre que six, il faut certaines conditions.

4° Lorsqu'un corps peut se mouvoir autour de six axes *indépendants*, il peut prendre un déplacement quelconque, c'est-à-dire tourner autour d'un axe quelconque.

4° On peut toujours décomposer une force en six directions données par les arêtes d'un tétraèdre.

5° Étant donnés les corps A_1, A_2, A_3..... A_n ; les corps A_1 et A_2 peuvent tourner autour d'un axe fixe commun ; les

---

(*) *Collége Louis-le-Grand*, aujourd'hui *Lycée Descartes*. Lorsqu'une institution a acquis sous un certain nom une célébrité séculaire, ce nom devient un titre de propriété que doivent respecter ceux qui, n'adhérant pas aux doctrines du bagne, respectent la propriété. En général changer sans nécessité les noms des édifices, des lieux publics, est un acte barbare, anti-historique, détruisant la chaîne des traditions du passé, sans apporter aucune garantie pour l'avenir. *Nihil sub sole novum*, dit l'Ecclésiaste ; ce qui est surtout vrai en fait de folies. Ce bouleversement de nomenclature était aussi la manie de notre première république, ce qui ne l'a pas empêchée d'avoir une existence éphémère et de mourir *per euthanasiam* sous les étreintes d'un soldat corse. Pourquoi changer le mot français collége, si connu, si populaire, contre le mot pédantesque *lycée*, qui n'a pas même le mérite de l'exactitude ; car, chez les Grecs, la jeunesse était éduquée dans les *gymnases*, et il y en avait dans toutes les cités, tandis que le *lycée* n'était pas un collége, mais un établissement particulier à la ville d'Athènes, et qu'Aristote a rendu célèbre, tout comme Laharpe a jeté de l'éclat sur un établissement de même nom et de même destination à Paris. D'ailleurs nous ne saurions assez nous pénétrer de cette idée : rien n'est moins républicain que l'esprit servile d'imitation, dût-on imiter des républicains ; et ici ce n'est pas même le cas, car les lycées sont de création impériale ; ils ont succédé, non pas aux colléges royaux, mais aux *écoles centrales*, institutions éminemment républicaines, et qu'on aurait portées à une haute perfection, en renforçant la partie littéraire, qui était trop peu développée. Cette organisation présentait l'avantage de rendre impossible toute lutte entre l'instruction publique et les opinions religieuses. C'est ce que dit Lacroix dont personne ne conteste la compétence. Du reste, qu'on reprenne les noms anciens, ainsi que le veut le bon sens, ou que l'on conserve les nouveaux, là n'est pas le point important. Il faudrait améliorer les modes d'enseignement, et c'est ce qu'on ne fera pas. Tout pour la forme, rien pour le fond, c'est notre devise. Tm.

corps A_2 et A_3 autour d'un autre axe fixe commun et ainsi de suite jusqu'à A_{n-1} et A_n. Supposons maintenant qu'on rende fixe le corps A_1, il est évident que A_3 peut prendre plus de positions diverses dans l'espace que A_2; A_4 plus que A_3; mais le premier corps qui peut prendre une position quelconque dans l'espace tout comme s'il était libre, c'est le corps A_7, et *à fortiori* les suivants. Le savant géomètre fait à ce sujet une curieuse observation. La jambe de l'écrevisse à laquelle sont attachées les serres est formée de six pièces liées entre elles et au corps par six axes de rotation; de sorte que pendant que le corps se repose, la partie extrême de la jambe est entièrement libre. Du reste, le bras de l'homme, depuis l'épaule jusqu'aux phalanges, présente une construction presque analogue.

SOLUTION DE LA QUESTION 189 (p. 240),

PAR M. J. MURENT,
Bachelier ès sciences, à Clermont-Ferrand.

Soient $t=f(x,y)$; $u=F(x,y)$; d'où $x=\varphi(u,t)$; $y=\psi(u,t)$; on a :

$$(f'_xF'_y-f'_yF'_x)(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t)=1,$$

f'_x étant la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, et ainsi des autres. (Mobius.)

Démonstration. D'après les relations données, x et y étant deux fonctions des variables indépendantes u et t, différentions chacune des équations $t=f(x,y)$ et $u=F(x,y)$, d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, en suivant la règle des fonctions composées, nous aurons ainsi :

$$1=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$
$$0=\frac{df}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{du}$$
$$0=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}$$
$$1=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{du};$$

en remplaçant les coefficients différentiels par les dérivées et observant que les relations $x=\varphi(u,t)$, $y=\psi(u,t)$ donnent $\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'_t$, $\frac{dx}{du}=\varphi'_u$, $\frac{dy}{dt}=\psi'_t$, $\frac{dy}{du}=\psi'_u$, les quatre équations précédentes se mettront sous la forme :

$$1=f'_x\varphi'_t+f'_y\psi'_t \qquad (1)$$
$$0=f'_x\varphi'_u+f'_y\psi'_u \qquad (2)$$
$$0=F'_x\varphi'_t+F'_y\psi'_t \qquad (3)$$
$$1=F'_x\varphi'_u+F'_y\psi'_u. \qquad (4)$$

Multipliant, d'une part (1) et (4), de l'autre (2) et (3), il viendra :

$$1=f'_xF'_x\varphi'_t\varphi'_u+f'_xF'_y\varphi'_t\psi'_u+f'_yF'_x\varphi'_u\psi'_t+f'_yF'_y\psi'_t\psi'_u$$
$$0=f'_xF'_x\varphi'_t\varphi'_u+f'_xF'_y\varphi'_u\psi'_t+f'_yF'_x\varphi'_t\psi'_u+f'_yF'_y\psi'_t\psi'_u;$$

retranchant membre à membre ces deux dernières, et réduisant, il restera :

$$1=f'_xF'_y(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t)-f'_yF'_x(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t),$$

ou enfin

$$(f'_xF'_y-f'_yF'_x)(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t)=1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ce théorème analytique ?

SOLUTION DE LA QUESTION 185 (p. 239),

PAR M. J. MURENT,
Bachelier ès sciences, à Clermont-Ferrand.

—

P étant la limite de la fraction continue :

$$a : a + b : b + c : c + d : d + \ldots,$$

et Q la limite de la fraction continue :

$$a : b + b : c + c : d + d : e + \ldots,$$

on a :

$$P(a + Q + 1) = a + Q.$$

Démonstration. Posons d'abord $\frac{1}{a} = a'$, $\frac{1}{b} = b' \ldots$, d'où $aa' = 1$, $bb' = 1 \ldots$; en multipliant par a' les deux termes de la fraction qui exprime la valeur de P, on aura :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a'b}{b + \cfrac{c}{c + \ldots}}};$$

si dans la partie $\dfrac{a'b}{\left(b + \dfrac{c}{c+\ldots}\right)}$, on multiplie les deux termes par ab', P deviendra :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{ab'c}{c + \cfrac{d}{d + \ldots}}}}.$$

De même si dans la partie $\dfrac{ab'c}{\left(c + \dfrac{d}{d+\ldots}\right)}$ de cette dernière

expression de P, on multiplie les deux termes par $a'bc'$, on trouvera :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a'b + \cfrac{a'bc'd}{d + \cfrac{e}{e + \ldots}}}}};$$

multipliant encore les deux termes de $\dfrac{a'bc'd}{\left(d + \cfrac{e}{e + \ldots}\right)}$ par $ab'cd'$, on trouvera :

$$P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a'b + \cfrac{1}{ab'c + \cfrac{ab'cd'e}{e + \cfrac{f}{f + \ldots}}}}}}.$$

En continuant ainsi, l'équation de P se changera en la suivante :

$$P = 1 : 1 + 1 : a + 1 : a'b + 1 : ab'c + 1 : a'bc'd + 1 : ab'cd'e + \ldots \quad (p)$$

Faisant sur Q les mêmes opérations, il viendra successivement :

$$Q = \cfrac{1}{a'b + \cfrac{a'b}{c + \cfrac{c}{d + \ldots}}}, \quad Q = \cfrac{1}{a'b + \cfrac{1}{ab'c + \cfrac{ab'c}{d + \cfrac{d}{e + \ldots}}}},$$

et enfin :

$$Q = 1 : a'b + 1 : ab'c + 1 : a'bc'd + 1 : ab'cd'e + \ldots;$$

substituant cette valeur dans (p), on obtiendra :

$$P = 1 : 1 + 1 : a + Q \quad \text{ou} \quad P = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a+Q}},$$

d'où
$$P = \frac{a+Q}{a+Q+1},$$

ou enfin
$$P(a+Q+1) = a+Q. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

NOUVELLE MÉTHODE ANALYTIQUE

pour la détermination des coordonnées des foyers et des longueurs des axes de coniques à centre,

PAR M. PAUL SERRET.

—

I. On sait, et l'on peut d'ailleurs le démontrer facilement, que le carré d'un demi-diamètre quelconque d'une conique à centre est égal au produit de la corde parallèle menée par l'un des foyers, multipliée par un coefficient constant $K = \frac{a}{2}$, a désignant soit le demi-grand axe de l'ellipse, soit le demi-axe transverse de l'hyperbole; or, on peut démontrer en prenant pour axes des coordonnées les deux axes principaux, que les deux foyers *seuls* jouissent de cette propriété, quelle que soit d'ailleurs la valeur *arbitraire* que l'on donne au coefficient K, pourvu qu'il demeure constant.

C'est précisément cette propriété des foyers qui va nous servir à déterminer par un calcul très-simple les coordonnées des foyers, et l'équation qui donne les carrés des demi-axes en fonction des coefficients de la courbe dans le cas le plus général.

II. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = F$ (1) l'équation de la conique

rapportée à deux diamètres parallèles aux axes primitifs, et faisant un angle γ; $F = -\frac{L}{m}$ valeur que nous lui restituerons dans les résultats définitifs.

Soit α, β l'un des foyers cherché, menons par l'origine un diamètre sous la direction m; soit D la valeur de ce demi-diamètre, soit C la longueur de la corde parallèle menée par (α, β), on aura :

$$D^2 = K.C;$$

or on trouve, en faisant momentanément $n = \beta - m\alpha$:

$$D^2 = \frac{F(1+m^2+2m\cos\gamma)}{Am^2+Bm+C};$$

$$C.K = K\frac{\sqrt{1+m^2+2m\cos\gamma} \times \sqrt{4AFm^2+4BFm+(B^2-4AC)n^2+4CF}}{Am^2+Bm+C};$$

égalant ces deux quantités, simplifiant et élevant au carré, il viendra :

$$F^2(1+m^2+2m\cos\gamma) =$$
$$= K^2[4AFm^2+4BFm+(B^2-4AC)(\beta-m\alpha)^2+4CF];$$

ordonnant cette équation de condition par rapport à la variable m, il viendra :

$$(2) \qquad m^2\{K^2[4AF+(B^2-4AC)\alpha^2]-F^2\}+$$
$$+2m\{K^2[2BF-(B^2-4AC)\alpha\beta]-F^2\cos\gamma\}+$$
$$+K^2\{4CF+(B^2-4AC)\beta^2\}-F^2=0.$$

Cette relation (2) devant exister pour toutes les valeurs de m, les trois coefficients doivent être nuls séparément; donc on aura les trois équations suivantes pour déterminer K, α, β :

$$K^2[(B^2-4AC)\alpha^2+4AF] = F^2 \qquad (a)$$
$$K^2[2BF-(B^2-4AC)\alpha\beta] = F^2\cos\gamma \qquad (b)$$
$$K^2[(B^2-4AC)\beta^2+4CF] = F^2. \qquad (c)$$

Or, en divisant alternativement l'équation (a) par cha-

cune des équations (b) et (c), et ne perdant pas de vue que $F=-\frac{L}{m}$, on retrouve les équations (b) et (c) de la page 420 tome II, dont M. Terquem déduit les coordonnées des foyers.

III. Supposons d'abord que l'on connaisse l'équation qui donne les carrés des demi-axes principaux de la courbe :

$$m^3.z^2-4mL.z-4L^2\sin^2\gamma=0,$$

d'où l'on tire, comme on sait :

$$a^2=\frac{2L}{m^2}\left[N+\sqrt{N^2+m\sin^2\gamma}\right];$$

Comme on sait *à priori* que $K^2=-\frac{a^2}{4}$, l'équation (a) nous donnera successivement :

$$\alpha^2=\frac{F^2-4AFK^2}{mK^2}=\frac{L^2+4mAL.K^2}{m^3K^2}=$$

$$=\frac{2L[m+2A(N+\sqrt{N^2+m\sin^2\gamma})]}{m^2[N+\sqrt{N^2+m\sin\gamma^2}]}.$$

Multipliant les deux termes de la valeur de α^2 par

$$N-\sqrt{N^2+m\sin\gamma},$$

il viendra :

$$\alpha^2=\frac{2Lm[N-\sqrt{\quad}]-4mAL\sin^2\gamma}{-m^3\sin^2\gamma}=$$

$$=\frac{4AL}{m^2}-\frac{1}{\sin^2\gamma}.\frac{2L}{m^2}[N-\sqrt{N^2+m\sin^2\gamma}];$$

mais b étant le demi-petit axe de l'ellipse, ou le demi-axe non transverse de l'hyperbole, on a :

$$b^2=\frac{2L}{m^2}[N-\sqrt{N^2+m\sin^2\gamma}];$$

on aura donc :

$$\text{(A)}\qquad \alpha^2=\frac{4AL}{m^2}-\frac{b^2}{\sin^2\gamma}.$$

Comparant les équations (a) et (c), on voit que la première est composée en A et α, comme la deuxième l'est en C et β; on aura donc immédiatement :

$$\text{(B)} \qquad \beta^2 = \frac{4CL}{m^2} - \frac{b^2}{\sin^2\gamma}.$$

Ce sont les formules données par M. Terquem, t. II, p. 430.

Observation. Remarquons que l'équation (b) donne immédiatement dans le cas particulier où $\gamma=90°$, $\alpha\beta = -\frac{BF}{m} = -\frac{n}{m}$; relation qu'emploie aussi M. Terquem, t. IV, p. 376, dans une solution généralisée du problème du concours général pour l'année 1845.

IV. Supposons maintenant que nous voulions déduire des trois équations (a), (b), (c) l'équation dont les racines soient les carrés des demi-diamètres principaux.

En éliminant α et β des équations (a), (b), (c), et remplaçant K^2 par $\frac{a^2}{4}$ dans l'équation résultante, nous arrivons assez facilement à l'équation :

$$m^2a^4 - 4m.NLa^2 - 4L^2\sin^2\gamma = 0; \qquad \text{(H)}$$

donc le carré de l'un des demi-axes principaux a^2, est racine de l'équation :

$$m^2z^2 - 4mNL.z - 4L^2\sin^2\gamma = 0. \qquad \text{(L)}$$

Il s'agit de prouver que le carré du second demi-axe est aussi racine de la même équation. Or, soit c la distance du foyer au centre, on aura :

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

or $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma$; donc vu la forme des équations (a), (b), (c), nous pourrons très-facilement obtenir la valeur de c^2; on trouve en effet successivement :

$$c^2 = \frac{2F^2 - 4F(A+C).K^2 + 4BF\cos\gamma\, K^2 - 2F^2\cos^2\gamma}{mK^2} =$$

$$= \frac{-4NF.K^2 + 2F^2\sin^2\gamma}{mK^2},$$

remplaçant K² et F par leurs valeurs : $\frac{a^2}{L}$, $\frac{-L}{m}$, on obtient :

$$c^2 = \frac{4mNL.a^2 + 8L^2 \sin^2\gamma}{m^3a^2},$$

d'où l'on tire :

$$a^2 - c^2 = b^2 = \frac{m^3a^4 - 4mNLa^2 - 8L^2\sin^2\gamma}{m^3a^2},$$

ou bien, en ayant égard à la relation (H) :

$$b^2 = -\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3a^2}, \text{ d'où } a^2b^2 = -\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3a^4}.$$

Mais le produit des racines de l'équation (L) est aussi égal à $-\frac{4L^2 \sin^2\gamma}{m^3}$; a^2 est l'une de ces racines, donc b^2 est l'autre racine.

Donc enfin l'équation aux carrés des demi-axes principaux d'une conique à centre est bien l'équation (L) :

$$m^3z^2 - 4mNL.z - 4L^2 \sin^2\gamma = 0.$$

V. On pourrait encore chercher les coordonnées des foyers, en s'appuyant sur cette propriété dont ils jouissent, à l'exclusion de tout autre point, et qui consiste en ce que :

— Si d'un point *quelconque* M de la polaire d'un foyer F, on mène deux tangentes à la conique et leur corde de contact, puis du même point M une perpendiculaire sur la corde des contacts, le pied de cette perpendiculaire sera constamment le point F lui-même.

— Cette dernière propriété *caractéristique* des foyers peut servir à mettre facilement en évidence les conditions $DE - 2BF = 0$, $D^2 - 4AF = E^2 - 4CF$, nécessaires pour que l'origine des coordonnées soit un foyer quand les axes sont rectangulaires. Mais si les axes deviennent obliques, la mise en évidence des conditions précédentes modifiées, ne peut plus se faire commodément par cette méthode.

SOLUTION DE LA QUESTION 184 (t. VII, p. 239),

PAR MM. MENTION ET GILLES (LUCIEN).

—

On a la formule (*voir* t. VI, p. 399) :

$$a^p + b^p = (a+b)^p - \frac{p}{1}ab(a+b)^{p-2} +$$

$$+\frac{p(p-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{p-4} - \frac{p(p-5)(p-4)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{p-6}\ldots +$$

$$+(-1)^r a^r b^r \frac{p}{1}.\frac{p-2r+1}{2}.\frac{p-2r+2}{3}\ldots\frac{p-r-1}{r}(a+b)^{p-2r}.$$

$\frac{p-1}{2}$ est la valeur de r, qui correspond au dernier terme dont le coefficient sera p, et qui contiendra $(a+b)$ à la première puissance.

Actuellement soit α un facteur premier commun à $a+b$ et $\frac{a^p+b^p}{a+b}$, il devra diviser le terme indépendant de $a+b$ dans le développement de $\frac{a^p+b^p}{a+b}$, qui est :

$$\pm a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Or, α ne peut diviser ni $a^{\frac{p-1}{1}}$, ni $b^{\frac{p-1}{2}}$, puisqu'il diviserait a ou b ; et comme α divise $a+b$, il diviserait à la fois a et b, ce qui est absurde ; donc il divise p. Mais p est premier, donc $\alpha = p$.

Supposons que p^q divise a^p+b^p, on voit que, si $(a+b)$

ne contenait pas $q-1$ fois p, le dernier terme $a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} p(a+b)$ ne pourrait pas contenir q fois le facteur p.

Remplaçant b par $-b$, on aura $a^p - b^p$, puisque p est impair, et les mêmes considérations s'appliqueront.

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré (*V.* t. VI, p. 618) ; *théorie des polaires réciproques.*

Pour la commodité des lecteurs, s'il y en a, nous allons transcrire de nouveau ces relations :

γ = angle des axes ; $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ fonction principale $= L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC)$.

Fonctions dérivées.

$$\frac{dL}{dA} = E^2 - 4CF = l'; \quad \frac{dL}{dC} = D^2 - 4AF = l;$$

$$\frac{dL}{dB} = -DE + 2BF = -n; \quad \frac{dL}{dD} = 2CD - BE = k';$$

$$\frac{dL}{dE} = 2AE - BD = k; \quad \frac{dL}{dF} = B^2 - 4AC = m.$$

Fonction auxiliaire.

$$N = A + C - B\cos\gamma;$$

Relations d'identité.

$k^2 - ml = 4AL$; $2kk' + 2mn = -4BL$; $k'^2 - ml' = 4CL$;
$k'l + kn = 2DL$; $kl' + k'n = 2EL$; $n^2 - ll' = 4FL$.
$Cl - Al' + Ek + mF = Al' - Cl + Dk' + mF = L$;
$2Al' - Bn + Dk' = 2Cl - Bn + Ek = 2L$.

$Ak'^2 + Bkk' + Ck^2 + mDk' + mEk + m^2F = mL;$

$k^2 + k'^2 + 2kk'\cos\gamma = 4NL.$

$k^2l' + k'^2l + 2kk'n + m(n^2 - ll') = 4L^2$ (coniques à centre).

On obtient cette relation en mettant dans B^2-4AC, pour A,B,C leurs valeurs en fonctions dérivées.

$2Ck + Bk' + Em = 2Ak' + Bk + Dm = -2An + Bl + Dk = -$
$= -2Cn + Bl' + Ek' = 0.$

$(A - C)^2 + (B - 2A\cos\gamma)(B - 2C\cos\gamma) = N^2 + m\sin^2\gamma =$
$= (A - C)^2\sin^2\gamma + [B - (A + C)\cos\gamma]^2.$

$(2Ay + Bx + D)^2 - (2Cx + By + E)^2 = mx^2 - 2kx + l -$
$-(my^2 - 2k'y + l').$

$$mx^2 - 2kx + l = m\left[\left(x - \frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4AL}{m^2}\right];$$

$$my^2 - 2k'y + l' = m\left[\left(y - \frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{4CL}{m^2}\right].$$

$(2Ay + Bx + D)(2Cx + By + E) = ky + k'x - mxy + n.$

$A(2Cx + By + E)^2 + C(2Ay + Bx + D)^2 - B(2Cx + By + E)$
$(2Ay + Bx + D) = L - m(Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F).$

LXXXII. *Théorème*. Soit une courbe A, située dans le plan d'une conique C; l'*enveloppe* des polaires des points de la courbe A relativement à la conique C est la même courbe que le *lieu* des pôles des tangentes à la courbe A relativement à la même conique.

Démonstration. Désignons l'enveloppe des polaires par A', et le lieu des pôles par A''; soient M et M' deux points de la courbe A, et MT, M'T les deux tangentes se rencontrant en T; et soit μ le pôle de MT, et μ' le pôle de M'T; de sorte que μ et μ' sont deux points de la courbe A'', et T est le pôle de la corde $\mu\mu'$; M' s'approchant de M, le point T s'en approche également et finit par se confondre avec M; alors μ' se confond avec μ et la corde $\mu\mu'$ devient une tangente à la courbe A''

quel passent plusieurs branches de la courbe, correspond une tangente *multiple*, dans la polaire réciproque, c'est-à-dire une droite tangente à plusieurs branches et *vice versâ*.

Remarque VIII. A un point conjugué isolé, c'est-à-dire un point réel d'intersection de deux branches devenues imaginaires, correspond une polaire réelle, droite conjuguée isolée tangente à des branches imaginaires et *vice versâ*.

Remarque IX. A un point de rebroussement, c'est-à-dire un point où deux branches de la courbe se *touchent*; correspond un point d'inflexion dans la polaire réciproque; en effet, dans un point de rebroussement, le point décrivant change subitement de direction; donc la tangente doit aussi changer subitement de direction dans la polaire réciproque, ce qui a lieu aux points d'inflexion.

LXXXIII. *Historique*. De La Hire (Philippe) est le premier qui ait énoncé, en 1685, les deux propriétés géométriques qui, dans une conique, lient le pôle à sa polaire et celle-ci à son pôle (Sectiones conicæ in novem libros distributæ. In-fol., Paris, 1685, lib. 1, prop. 26, 27, 28; et lib. 2, prop. 23, 24, 26, 27).

Monge, généralisant les théorèmes de De La Hire, et probablement sans les connaître, découvrit, en 1795, les relations géométriques qui existent dans les surfaces du second degré, entre le pôle et le plan polaire et *vice versâ*, et aussi entre deux droites correspondantes. Il y parvient par des considérations graphiques et nullement métriques (Séances des écoles normales, t. II, p. 357, éditon de 1800, la première est de l'an III (1795)).

Livet et M. Brianchon ont démontré, en 1806, que la surface réciproque d'une surface du second degré est encore une surface de même degré (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XIII, 270 et 297, 1806).

Cette théorie a été cultivée et augmentée, spécialement

dans les Annales de M. Gergonne, où cette théorie occupe le plus grand espace. Servois a introduit le nom de *Pôle* (T. I, 337, 1810) et M. Gergonne celui de *Polaire* (III, 297, 1813).

Dualité. A tout théorème sur des *points* dans une courbe correspond un théorème sur des *droites* dans la polaire réciproque, et *vice versâ*; c'est ce qu'on désigne par le mot *dualité*. Le premier emploi de ce genre et le plus célèbre est celui de M. Brianchon, qui a trouvé le théorème correspondant de l'hexagramme de Pascal (Journal de l'École polytechnique, cahier XIII, 297, 1806). Depuis, cette dualité a reçu une grande extension, surtout par les travaux de M. Poncelet qui, le premier, s'est servi de la théorie des polaires réciproques pour la transformation des relations de grandeur métrique et angulaire, dans son *Traité des propriétés projectives*, publié en 1822. Là, le célèbre géomètre a établi la dénomination de *polaires réciproques* et de *directrices*, et en a donné la théorie fondamentale (p. 121) et l'a appliquée à la recherche des propriétés des courbes et des surfaces en général. (*Voir* Chasles, *Histoire des méthodes*, p. 219, et note XXVII, p. 370, 1837.)

LXXXIV. *Problème.* Étant données l'équation d'une courbe plane algébrique et celle de la conique directrice, trouver l'équation *enveloppe* de la polaire réciproque.

Solution. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe de degré m; et $\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0$, l'équation de la conique directrice. Nous désignons de même par les lettres grecques Λ, $\varkappa$, $\varkappa'$, etc., les fonctions analogues à L, k, k', etc. Soit $py+qx=1$ l'équation d'une tangente à la polaire réciproque; les coordonnées du pôle de cette droite par rapport à la conique sont :

$$x=\frac{-\nu p+\lambda q-\varkappa}{\varkappa' p+\varkappa q-\mu};\ y=\frac{\lambda' p-\nu q-\varkappa'}{\varkappa' p+\varkappa q-\mu};\qquad \text{(T. II, p. 305.)}$$

substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe; on a l'équation enveloppe cherchée; elle est en p et q de même degré que la proposée; ce qu'on peut voir *à priori*.

Application 1. La courbe donnée est une conique à équation hexanome ordinaire.

Soit $a_1p^2+b_1q^2+c_1q^2+d_1p+e_1q+f_1=0$, l'équation enveloppe de la polaire réciproque; on a

$$a=A\lambda'^2-B\lambda'\nu+C\nu^2+D\lambda'\kappa'-E\kappa'\nu+F\kappa'^2,$$
$$b=-2A\lambda'\nu+B(\lambda\lambda'+\nu^2)-2C\lambda\nu+D(\lambda'\kappa-\nu\kappa')+E[\lambda\kappa'-\nu\kappa]+2F\kappa\kappa',$$
$$d=-2A\lambda'\kappa'-B(\lambda'\kappa-\nu\kappa')+2C\nu\kappa-D(\mu\lambda'+\kappa'^2)-E[-\mu\nu+\kappa\kappa]-2F\mu\kappa',$$
$$f=A\kappa'^2+B\kappa\kappa'+C\kappa^2+D\mu\kappa'+E\mu\kappa+F\mu^2.$$

On conclut c et e respectivement de a et d en changeant A; D; κ; λ en C; E; κ', λ' et *vice versa*. On connaît l'espèce de la polaire réciproque d'après ce qui a été dit ci-dessus p. 278.

Application 2. Si la directrice est une circonférence, ayant son centre à l'origine; prenant les axes rectangulaires, l'équation de cette directrice est $y^2+x^2+\zeta=0$; d'où $\mu=-4$; $\kappa=\kappa'=\nu=0$; $\lambda=\lambda'=-4\zeta$; on trouve pour équation enveloppe de la polaire réciproque :

$$(Ap^2+Bpq+Cq^2)\zeta^2-(Dp+Eq)\zeta+F=0.$$

L'espèce de la polaire dépend du signe de FL (*V.* p. 278); ce qui est évident *à priori*, car, suivant que le centre de la directrice, qui est ici l'origine, est dans l'intérieur de la courbe donnée, dessus ou dehors, la polaire réciproque est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Mêmes données.

Application 3. Pour que l'enveloppe soit un cercle, l'on doit avoir, axes rectangulaires $e^2=4cf$; $d^2=4af$; $de=4bf$ (p. 278); si l'on prend pour directrice un cercle décrit d'un foyer de la conique comme centre, un calcul facile fait voir que l'équation de l'enveloppe satisfait aux trois

conditions, et par conséquent la polaire réciproque est un cercle; et la polaire réciproque d'un cercle par rapport à un autre cercle directeur est une conique ayant pour foyer le centre du cercle directeur, et pour axe focal la droite qui réunit les centres des deux cercles.

(*La suite prochainement.*)

COMPOSITIONS ÉCRITES

des six séries dans lesquelles on a partagé les candidats à l'École polytechnique, à Paris, en 1848 (*V.* t. VI, p. 326) (*).

—

Première série.

Théorie des limites et ses applications à la géométrie.

On donne une droite, un point o sur cette droite et deux points A, B hors cette droite; on mène une suite de couples de sécantes AM, BM qui la coupent en des points C, D; tels que le produit $oC \times oD$ est constant; trouver le lieu des points M.

Poids spécifiques, instruments propres à les déterminer.

Propriétés de l'oxygène.

Faire passer un cercle par trois points.

Deuxième série.

Méthode des coefficients indéterminés et ses applications.

Lieu des foyers des paraboles égales inscrites toutes dans le même angle droit (t. III, p. 226 et 352).

Baromètre et machine pneumatique.

Propriétés de l'oxygène.

Intersection d'une sphère et d'un plan.

(*) Examinateurs : MM. Bertrand et Hermite; Lefébure de Fourcy et Serret.

Troisième série.

de des polygones et des polyèdres.

projections du sommet d'une ellipse sur toutes ses équation polaire du lieu (*V*. p. 234).

ules relatives aux foyers des miroirs et des lentilles.

opriétés de l'azote.

·te distance de deux droites, dont une est parallèle a ligne de terre.

Quatrième série.

rie du plus grand commun diviseur.

olaire de la cou suivant laquelle se transe plane d'un côn quand on déroule le cône plan (t. IV, p. 577).

duction, propagation et réflexion du son.

P étés du chlore.

deux plans, dont un est parallèle à la ligne de terre.

Cinquième série.

Transformation des coordonnées.

Lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, dont la base a ses deux extrémités sur les deux côtés d'un angle droit donné et passe en outre par un point donné.

Inclinaison et déclinaison de l'aiguille aimantée, électrophore.

Propriétés du soufre.

Plus courte distance de deux droites, dont l'une est perpendiculaire au plan vertical.

Sixième série.

Déterminer les dimensions d'un cône droit dont on donne le volume et la surface convexe.

Résoudre l'équation :

$$x^4 + 20x^3 - 742x - 8660x - 22875 = 0.$$

Miroirs et lentilles sphériques.

Intervalles musicaux.

Propriétés du carbone.

Mener par un point donné une droite parallèle à deux plans donnés, et construire la longueur de la partie de cette droite comprise entre le point donné et un troisième plan donné.

GRAND CONCOURS DE 1848 (*V.* p. 286).

Question de mathématiques spéciales complétée.

Il faut joindre à l'énoncé donné (p. 286), ce qui suit :

« On indiquera la méthode à suivre, et l'on en fera l'appli-
» cation au cas suivant :

» L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; celle de la courbe
» à laquelle TS demeure tangente, est $x^2=9y$ (x et y dési-
» gnant des coordonnées rectangles relatives aux mêmes
» axes). »

Note. Le Deutéronome dit, et l'Évangile répète, que l'homme ne vit pas seulement de pain (*non in solo pane vivat homo*). Si ces ouvrages s'étaient occupés de sciences exactes, on y aurait lu sans doute que le mathématicien ne vit pas seulement de géométrie. Pourquoi donc, dans le grand concours, ne s'enquière-t-on jamais ni d'arithmologie, ni de l'analyse équationnelle, ni des deux trigonométries, ni de statique? Est-ce qu'il n'y a plus là matière à questions à la portée des élèves? Et même, en fait de géométrie, pourquoi s'en tenir toujours au rez-de-chaussée et condamner z à une éternelle nullité? Au temps des lycées, les compositions embrassaient les trois dimensions. Dans les colléges, on a ôté une dimension ; cette amputation semble plus profitable à la paresse qu'à la science.

QUESTION D'EXAMEN.

Lieu géométrique du centre d'un cercle tangent aux côtés d'un triangle, inscrit dans une circonférence,

PAR M. ADRIEN LAFOND,
élève du lycée Monge (classe de M. VINCENT).

Théorème. Un triangle inscrit dans un cercle donné ayant un angle constant, et le sommet de ce même angle fixe; le lieu du centre du cercle qui touche les côtés du triangle est un *limaçon* de Pascal. (Paul Serret.)

Démonstration (*). *Équation polaire.* Soit C le centre du cercle donné, ABD le triangle inscrit, B l'angle constant et aussi le sommet fixe. Soit O le centre d'un cercle inscrit, et H, H' les points de contact de ce cercle avec les côtés AD, AB; menons la droite BO rencontrant de nouveau le cercle donné en N; prenons le diamètre BOM pour axe polaire; posons $BC = R$; $BO = \rho$; $OBM = \omega$; $BN = \rho_1$; $AH = AH' = \beta$; $BH' = \alpha = \rho\cos\frac{1}{2}B$; $AD = 2c$; menons AN et DN; les triangles ABN, DBN donnent:

$$\overline{AN}^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\rho_1(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}B + \rho_1^2;$$

$$\overline{DN}^2 = (2c-\beta+\alpha)^2 - 2\rho_1(2c-\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}B + \rho_1^2.$$

Mais $AN = DN$; faisant la soustraction et divisant par $4(c-\beta)$, il vient:

$$\rho_1\cos\frac{1}{2}B - c - \alpha = 0;$$

(*) Le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure.

or, $\rho_1 = 2R\cos\omega$; $c = R\sin B$; donc

$$\rho = 2R(\omega - \sin\tfrac{1}{2}B), \qquad (1)$$

équation polaire cherchée. Telle est aussi l'équation du *limaçon* de Pascal; on sait que cette courbe est du genre conchoïde; la base est ici le cercle donné, B le point fixe, et $ON = BN - BO = 2R\sin B$ est la longueur fixe, qu'on porte en dedans et au dehors du cercle. (*Voir* t. II, p. 290.)

La discussion de la courbe ne présente aucune difficulté; la courbe appartient aussi aux cercles inscrits et ex-inscrits.

Équation aux coordonnées rectangulaires :

$$(y^2 + x^2 - 2Rx)^2 - 4R^2(y^2 + x^2)\sin^2\tfrac{1}{2}B = 0.$$

Observation. Lorsqu'on prend l'angle supplémentaire de B, il faut remplacer $\sin\frac{1}{2}B$ par $\cos\frac{1}{2}B$.

Note. Construisant le cercle $y^2 + (x - 2R)^2 = 4R^2\sin\frac{1}{2}B$ et abaissant de l'origine des perpendiculaires sur les tangentes, les pieds des perpendiculaires forment le limaçon de Pascal (t. IV, p. 426); autrement le limaçon de Pascal est la *podaire* de l'origine de ce cercle. Tm.

QUESTION D'EXAMEN

Sur le mouvement, pour l'admission à l'École polytechnique en 1848 (*V.* t. VI, p. 401).

—

Problème. n courbes situées dans le même plan sont parcourues chacune par un point matériel de masse connue; on donne la loi du mouvement de la projection de chacun de ces points sur une droite; trouver le lieu géométrique du centre de gravité de ces masses.

Solution. Soient $F_1=0, F_2=0 \ldots F_n=0$ (1) les équations des n courbes données; soit $x=f_1(t), x=f_2(t) \ldots x=f_n(t)$, t désignant le temps, les relations données du mouvement des projections des n points matériels des masses $m_1, m_2 \ldots m_n$; éliminant x entre les équations $F_1=0$ et $x=f_1(t)$, on aura : $y=\varphi_1(t)$; de même $y=\varphi_2(t) \ldots y=\varphi_n(t)$; x et y étant les coordonnées du centre de gravité des masses au bout du temps t, on aura :

$$(m_1+m_2+\ldots m_n)x=m_1f_1(t)+m_2f_2(t)+\ldots m_nf_n(t)$$
$$(m_1+m_2+\ldots m_n)y=m_1\varphi_1(t)+m_2\varphi_2(t)+\ldots m_nf_n(t);$$

éliminant t, on a la relation cherchée entre x et y.

Théorème. Un point matériel décrit une conique, de telle manière que ses projections sur une droite sont soumises à un mouvement uniforme; dans le même plan, un autre point matériel décrit une droite d'un mouvement uniforme; le centre de gravité des deux masses décrit une conique.

Démonstration. L'abscisse de la droite est une fonction linéaire entière du temps; donc l'ordonnée est aussi une telle fonction. L'abscisse de la conique est une fonction linéaire du temps; donc l'ordonnée de la conique est une fonction linéaire du temps, plus la racine carrée d'une fonction de second degré du temps. Ainsi x et y étant les coordonnées du centre de gravité, on a : $x=f(t)$; $y=\varphi(t)+\sqrt{\varphi_1(t)}$; $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions linéaires, et $\varphi_1(t)$ une fonction du second degré; donc t est une fonction linéaire de x, et l'on a : $y=F(x)+\sqrt{F_1(x)}$, où $F(x)$ est linéaire et $F_1(x)$ du second degré. C. Q. F. D.

Observation. Dans la question particulière proposée par M. Bertrand, la conique est une parabole, et le centre commun de gravité devient aussi une parabole. Lorsque les deux vitesses des mouvements uniformes sont égales et de sens opposés, la parabole que décrit le centre de gravité se change en une droite analytiquement double; évident *à priori*.

BIOGRAPHIE.

—

WANTZEL.

Les sciences mathématiques viennent de perdre, avant qu'il eût atteint trente-quatre ans, un des hommes sur lesquels elles pouvaient fonder les plus belles espérances. On pense que les lecteurs des *Nouvelles Annales*, qui ont reçu le dépôt de plusieurs de ses remarquables travaux, verront avec un vif intérêt une notice sur ce qui concerne ce savant si éminent et si regrettable.

Pierre-Laurent Wantzel, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur et examinateur d'admission à l'École polytechnique, membre de la Société philomathique, naquit à Paris le 5 juin 1814, de M. Frédéric Wantzel, encore existant, et de Marie Aldon-Beaulieu, qui a précédé son fils de six mois dans la tombe. Son père, d'une famille de banquiers de Francfort-sur-le-Mein, que les guerres de 1798 avaient obligé de venir chercher l'existence à Paris, s'était armé, trois mois avant la naissance de son fils, pour défendre, dans les rangs de la vieille garde impériale, le territoire envahi de sa patrie adoptive. Rentré sept ans après dans la vie civile, où il occupe depuis cette époque la place de professeur de mathématiques appliquées à l'École spéciale du commerce, M. Wantzel père avait retrouvé sa femme et ses enfants à Écouen près Paris, où son beau-père possédait une propriété.

Déjà la haute intelligence de Laurent Wantzel se révélait. Placé chez l'instituteur primaire d'Écouen, qui était en même temps arpenteur, il montrait, avec une grande mémoire,

une merveilleuse aptitude pour les mathématiques, dont il lisait les livres avec une extrême avidité. Il dépassait bientôt son maître, qui recourait au petit Wantzel, à peine âgé de neuf ans, lorsqu'il avait à faire quelque arpentage difficile.

Entré en novembre 1826, à douze ans et demi, à l'École des Arts et Métiers de Châlons, alors dirigée par un géomètre bien capable de l'apprécier, feu M. Bobilier, il était bientôt licencié (avril 1827) avec toute l'école, pour une révolte à laquelle son caractère méditatif et paisible avait dû le détourner de prendre aucune part : aussi était-il inscrit le premier sur la liste de réorganisation en octobre suivant. Mais il ne se sentait aucun goût pour les travaux manuels auxquels tous les élèves de cette école étaient désormais astreints, et il sollicitait éloquemment, dans ses lettres à son père, une éducation plus scientifique.

La communication qui fut donnée de cette correspondance remarquable à M. Lievyns décida son entrée, le 28 mars 1828, dans l'institution dont cet homme honorable était chef, rue Boucherat, à Paris. C'est le même qui, quatorze ans plus tard, lui donna la main de sa fille aînée. Il se chargea lui-même d'enseigner les langues grecque et latine à son nouvel élève qui n'en possédait pas les premiers rudiments; et, grâce à ses paternelles et habiles leçons, Wantzel, dont l'ardeur et le courage ont toujours égalé l'intelligence, était admis six mois après à suivre une classe de seconde du collége Charlemagne. Deux accessit, l'un de vers latins dans cette classe, l'autre de version grecque un an après en rhétorique, témoignent assez que cette admission ne fut point une affaire de faveur.

Ses progrès, comme on peut le penser, n'étaient pas moins rapides dans les sciences, sous la savante direction de M. Blanchet, alors répétiteur dans l'institution Lievyns, et aujourd'hui inspecteur général de l'Université. Les succès

les plus brillants en étaient le résultat. Aussi, feu M. Reynaud le pria, en 1829, de corriger les épreuves d'une nouvelle édition de son Traité d'arithmétique, et introduisit précieusement, dans ce livre très-répandu, une démonstration due à Wantzel, alors âgé de quinze ans, d'un lemme sur lequel tout le monde se basait depuis longtemps dans la pratique de l'extraction de la racine carrée, mais qui n'avait pas encore été démontré.

Élève de philosophie en 1831, il obtenait, cette année, le premier prix de dissertation française au collége Charlemagne et le deuxième prix de dissertation latine au concours général des colléges de Paris; et, l'année suivante, il remportait au concours général, comme à son collége, les premiers prix de mathématiques spéciales et de physique. A la même époque (1832) il était reçu, à dix-huit ans, le premier à l'École polytechnique et le premier à l'École normale (section des sciences), double succès inconnu jusqu'à lui.

Le souvenir de son passage par l'École polytechnique s'y est conservé par une glorieuse tradition, tant fut grande l'impression qu'y laissèrent la supériorité de son esprit et la noblesse, la franchise, la bienveillance de son caractère.

Sorti en 1834, dans les ponts et chaussées, il fut envoyé en 1835 dans les Ardennes, comme élève en mission, et en 1836 dans le Berry. Mais, après sa dernière année d'école spéciale, il ne voulut plus quitter les spéculations de la science. Il disait gaiement à ses amis qu'il ne ferait qu'un médiocre ingénieur. Il préférait l'enseignement des mathématiques, qu'il professait longtemps déjà avant de quitter les bancs, et qu'il professa encore quelques jours avant sa mort. Il demanda donc, en 1837, un congé indéfini, renonçant, quoique sans fortune, à tout traitement, et bien résolu à donner sa démission si le congé était refusé. Le chef de son administration, M. Legrand, n'eut garde de perdre un pareil

homme. Il le chargea, pour pouvoir lui conserver une partie de ses appointements, d'analyser quelques ouvrages écrits en langue allemande, que son père lui avait apprise dans une de ses vacances; il lui donna, en mai 1840, le grade d'ingénieur, et l'attacha à l'École des ponts et chaussées à la fin de 1844, comme répétiteur du cours de mécanique appliquée.

Cependant l'École polytechnique l'inscrivait, en 1838 (20 novembre), au nombre de ses répétiteurs d'analyse, et il était chargé en 1843, au décès de M. Reynaud, des examens d'admission. Il faisait le cours de mathématiques spéciales dans les institutions de M. Massin et de M. Verdot (successeur de M. Lievyns), et des interrogations périodiques dans plusieurs autres. Il suppléait souvent les professeurs de mathématiques et de physique du collége Charlemagne. De nombreux élèves venaient chez lui recevoir des leçons particulières.

Son enseignement, au dire de tous, portait un cachet particulier de netteté, de fermeté, de lucidité et d'agrément. Personne ne savait, avec plus de douceur et de patience, obtenir de ses auditeurs un silence plus attentif. Il était toujours compris, malgré la rapidité de son exposition, l'originalité de ses méthodes, et la volubilité de sa parole, dont le ton ne s'élevait jamais. Une objection imprévue, une difficulté malicieusement proposée, était à l'instant résolue: aussi ses élèves l'adoraient et le vénéraient. Dans les examens, il était devenu en quelque sorte proverbial pour l'impartialité aussi consciencieuse qu'éclairée : si quelques candidats le redoutaient, c'est qu'ils n'étaient pas sûrs d'eux-mêmes, et que l'on savait qu'avec lui rien n'était donné au hasard. Il se récusait loyalement pour peu qu'il les connût.

Dans ses tournées, il examinait dix et douze heures par jour, bien que déjà malade. En général, on peut lui reprocher d'avoir été trop rebelle aux conseils de la prudence et

de l'amitié. Il travaillait ordinairement le soir, ne se couchant que bien avant dans la nuit, lisait ensuite, et ne dormait que quelques heures d'un sommeil agité, faisant alternativement abus de café et d'opium; ne prenant ses repas, jusqu'à son mariage, qu'à des heures mal réglées. Il se fiait sans mesure à une constitution naturellement très-forte, à laquelle il faisait braver à plaisir tous les genres d'épreuve. Il en a tristement fait porter la peine à ceux qui pleurent sa fin prématurée.

Nous donnerons plus bas la note à peu près complète de ses travaux. Ces travaux sont importants sans doute. Ils portent presque tous l'empreinte de sa haute supériorité; plusieurs constituent un vrai service rendu à la science. Mais, disons-le, ils ne sont pourtant pas en rapport avec ce qu'il était permis d'attendre de son imagination active, de son extrême facilité, de sa connaissance étendue et profonde des mathématiques pures. On a attribué cette sorte de mécompte à la tournure métaphysique de son esprit : je crois qu'il est dû plutôt à l'irrégularité de sa manière de travailler, à l'excès des occupations où il s'était engagé, au mouvement continuel et pour ainsi dire fébrile de sa pensée, et à l'abus même de sa facilité. Wantzel improvisait plus qu'il n'élaborait : il ne se donnait probablement pas le loisir ni le calme nécessaires pour rester longtemps sur un même sujet. Tout porte à penser que s'il eût vécu quelques années encore, il eût modifié ce régime, et que, mettant enfin sérieusement en œuvre les matériaux accumulés, il eût, par des travaux suivis et d'une haute portée, pris dans le monde savant la place que lui assignait son génie mathématique.

Mais, si occupé qu'il fût, il avait toujours du temps de reste quand il était question d'obliger. Un ami lui soumettait-il une difficulté, un problème, le lendemain ne se passait pas sans en recevoir la solution complète, ou la preuve

irréfragable que le problème, mal posé, était sans solution.

La conversation de Wantzel était animée, rapide et jamais oiseuse. Un interlocuteur dont il se croyait compris pouvait la prolonger à volonté. Il aimait cependant le silence, et le gardait strictement plutôt que de parler pour ne rien dire. Il était éminemment contradicteur, mais sans passion, et jamais sa contradiction ne désobligeait; comme elle ne portait point sur des mots, elle tendait, jusque dans ses paradoxes, à éclairer, en les soulevant, de nouvelles faces des questions, et on le voyait abandonner sa première opinion au point d'entrer quelquefois, avec bonhomie, dans votre sens autant que vous-même. Plein de déférence et d'aménité, c'était un de ces hommes rares qui disent tout sans blesser, qui n'ont pas le temps de penser mal de personne et qui, respectant tout le monde, sont respectés et aimés de tous. Ses lettres étaient pleines de convenance et de modestie.

Son érudition variée devenait expansive lorsqu'on la provoquait. Passionné pour la musique quoique à peine musicien, il raisonnait contre-point avec les plus savants compositeurs. Il avait étudié avec une sorte d'acharnement, avant et après son entrée à l'École polytechnique, les philosophes allemands et écossais de la fin du dernier siècle, et les éclectiques français du nôtre; il avait médité Gœthe, et il s'était même laissé surprendre par les auteurs modernes des romans français dits de mœurs. Mais sa haute raison lui faisait sentir bientôt le vide des doctrines purement humaines.

On me saura gré, je pense, de donner quelques détails sur ses sentiments en religion.

Enfant de chœur à Écouen où s'était faite sa première communion, Wantzel avait conservé une ferveur de piété extraordinaire à l'école de Châlons et dans la pension de M. Lievyns, où l'instruction religieuse était donnée par M. l'abbé Bertin, du clergé de St-Paul-St-Louis. La moindre

faute, quelquefois imaginaire, qu'il croyait avoir à se reprocher, tourmentait sa conscience scrupuleuse jusqu'à ce qu'il l'eût soulagée dans le sein de ce charitable directeur, qu'il aima toute sa vie avec tendresse, et auprès duquel il venait passer une ou deux heures par jour pendant ses maladies. Il continua à pratiquer ostensiblement, et avec assiduité, pendant sa première année d'École polytechnique, tous les préceptes catholiques, sans s'inquiéter des plaisanteries qu'il bravait, mais qui, suivant son père, ne laissaient pas de le faire souffrir. Tout à coup, à l'âge d'un peu plus de dix-neuf ans, les sentiments panthéistiques et sceptiques, jusque-là réprimés, l'emportèrent, et, bientôt, dans cette voie nouvelle, sa pensée et sa vie ne surent plus s'arrêter.... Il soutenait, en 1835, contre M. H****, ingénieur à Charleville, des discussions à outrance; il ne voyait plus M. Bertin que pour le combattre avec des arguments puisés dans ses lectures plus que dans ses propres idées.

A cette période de passion succéda une époque d'indifférence. Mais ce dernier état était trop peu dans sa nature pour qu'il pût s'y tenir. La foi revint en lui à l'époque de son mariage. Le retour fut, quelques moments, complet et pratique : il y avait sans doute été préparé par l'audition sérieuse, à Notre-Dame, des conférences des PP. Lacordaire et de Ravignan, qu'il goûtait beaucoup, surtout le second.

Plus tard, exprimant à M. Bertin son regret de se trouver encore si faible et si mal disposé, il venait lui demander des messes, et la consécration à la sainte Vierge des enfants qui lui naissaient.

Enfin, douze ou quinze jours avant sa mort, ayant rencontré M. l'abbé Bertin, il l'accompagna chez lui, lui dit son départ fixé au lendemain pour le Midi, s'occupa longuement avec lui de sa conscience, et se recommanda à ses prières au saint sacrifice.... Les doutes étaient dissipés, et

tous les sentiments du jeune âge étaient revenus dans cet esprit mûri par la réflexion et la souffrance. Son respectable ami, le croyant parti, n'alla point le visiter : il espère bien le revoir dans un meilleur séjour.

Son voyage en Languedoc n'eut pas lieu. Il eût été inutile. Le mal avait trop profondément déjà, depuis six mois, miné sa poitrine. Il ne put plus quitter sa chambre, et il succomba le 21 mai 1848, dans un moment où un faux espoir venait de renaître dans son entourage. Ses traits, calmes et sereins, aussitôt recueillis, étaient empreints de douceur et de génie, et d'une beauté inaccoutumée.

Il était marié depuis le 21 février 1842 à la fille, âgée à peine de dix-sept ans, de son ancien maître M. Lievyns, dont la maison est si fière de l'avoir eu pour élève. Elle lui a donné deux filles. Une lettre, aussi naïve que touchante, de cette jeune veuve à M. Wantzel père, sur son bonheur constant de six années, prouve que celui que nous regrettons n'était pas moins doué des qualités qui font la joie et la paix de l'intérieur d'une famille que de celles qui font le bon ami et l'homme utile à la société. Puisse ce faible témoignage apporter quelques moments de consolation à la douleur d'une telle perte.

PUBLICATIONS DE WANTZEL.

Journal de l'École polytechnique.

Cahier XXV, p. 151-157, 1837. Note sur les nombres incommensurables. L'auteur établit pour les incommensurables numériques des théorèmes analogues à ceux de M. Liouville sur les incommensurables algébriques.

Cahier XXVII, p. 85-122, 1839. Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pression considérables ; par MM. Barré de Saint-Venant et Wantzel.

Journal des mathématiques pures (Liouville).

Tome II, p. 366-372, 1837. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Il démontre pour la première fois l'impossibilité de résoudre *géométriquement* la duplication du cube, la trisection de l'angle, etc. Depuis, M. Sturm a simplifié ce genre de démonstration, mais il n'y a rien de publié.

Tome IV, p. 185-188, 1839. Lettre à M. Liouville sur la détermination de la figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation et soumise à des forces attractives. Le but est de rendre rigoureuse la seconde méthode de Laplace relative à cette question.

Comptes rendus de l'Académie.

2e sem. 1842, p. 732. Remarques à l'occasion d'un mémoire de M. Maurice sur l'invariabilité des grands axes.

2e sem. 1843, p. 1140. Nouvelles expériences sur l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pression considérables (conjointement avec M. de Saint-Venant).

Ibid., p. 1191. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des intégrales définies. L'auteur applique aux équations différentielles une méthode dont Laplace s'est servi pour les équations aux différences finies.

1er sem. 1844, p. 1197 (24 juin). Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure. Dans cette note remarquable, ouvrage de quelques heures, il simplifie et complète la solution de M. Binet, dont un extrait venait de paraître (Comptes rendus, 17 juin, p. 1115. Voyez aussi 1er juillet, 2e sém., p. 1). Comme conséquence, Wantzel a montré pour la première fois, dans une communication inédite faite à la Société philomathique le 29 juin (citée par M. de Saint-Venant au compte rendu de l'Académie, 15 juillet, p. 148), que la courbe affectée par l'axe

d'une verge élastique primitivement cylindrique, sollicitée par un *couple*, est nécessairement une hélice.

2e sem. 1845, p. 366. Note sur l'écoulement de l'air.

1er sem. 1847, p. 430. Note sur la théorie des nombres complexes à l'occasion du mémoire de M. Lamé sur le théorème de Fermat.

1er sem. 1848, p. 600 (posthume). Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques. Wantzel parvient à cette proposition : Les diamètres rectilignes d'une même courbe appartiennent à une conique dans laquelle ils correspondent aux mêmes cordes, et forment avec son contour des secteurs équivalents. L'auteur indique aussi le moyen de former l'équation générale des courbes qui ont *n* diamètres, et même des courbes autres que les coniques qui ont un nombre infini de diamètres rectilignes.

Société philomathique (nouveau Bulletin).

14 janvier 1843. Note sur les incommensurables d'origine algébrique.

11 février. Sur la surface dont l'aire est un minimum.

27 mai. État d'équilibre des températures dans un cylindre de forme quelconque, obtenu dans chaque cas au moyen de divers systèmes de surfaces isothermes.

11 janvier 1845. Sur la résolution des équations algébriques par des radicaux.

6 décembre. Démonstration purement algébrique de l'impossibilité d'exprimer les racines d'une équation algébrique par des fonctions transcendantes.

6 février 1847. Remarques sur la forme par laquelle M. Cauchy développe une fonction suivant la puissance de la variable.

20 novembre. Recherches sur les diamètres rectilignes des courbes.

Nouvelles Annales de mathématiques.

Tome II, p. 117-127, 1843. Classification des nombres incommensurables d'origine algébrique.

Tome III, p. 325-329, 1844. Note sur les racines complexes des équations et sur les facteurs des polynomes algébriques.

Tome IV, 57-65, 1845. De l'impossibilité de résoudre toutes les équations algébriques avec des radicaux.

On espère trouver dans ses papiers d'autres travaux, entre autres la communication inédite, faite à la Société philomathique, de la sommation d'une classe de séries, par le calcul des résidus. SAINT-VENANT.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PAR M. OSSIAN BONNET.

Le théorème de M. Serret, dont j'ai donné une démonstration analytique dans le tome précédent de ce Journal, n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif à toutes les surfaces gauches du second degré, et qui s'énonce ainsi :

« Dans toute surface gauche du second degré, la somme » des distances des différents points d'une même ligne de » courbure à une trajectoire orthogonale quelconque des gé» nératrices rectilignes du premier système et à une trajec» toire orthogonale quelconque des génératrices rectilignes » du second système, a constamment la même valeur. »

La démonstration de ce dernier théorème est d'ailleurs d'une extrême facilité. Soit, en effet, AmB une ligne de courbure d'un hyperboloïde ou d'un paraboloïde gauche,

CD une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du premier système, et C_1D_1 une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du second système. Prenons sur AmB deux points infiniment voisins m et m', et menons les génératrices rectilignes mn, mn_1, $m'n'$, $m'n'_1$, qui répondent à ces points, il faut prouver que

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1.$$

Or, prenons sur $n'm'$ une longueur $n'p'$ égale à mn, et sur mn_1 une longueur n_1p_1 égale à $m'n'_1$, puis joignons mp' et $m'p_1$, les deux triangles $mm'p'$ et $mm'p_1$ seront égaux, comme rectangles et ayant mm' commun et l'angle $mm'p'$ égal à l'angle $m'mp_1$, puisque, d'après une propriété bien connue, la ligne de courbure fait en chaque point des angles égaux avec les génératrices rectilignes qui y passent ; de là résulte :

$$m'p' = mp_1,$$

et par suite :

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES.

PAR E. CATALAN.

—

Parmi les différentes méthodes que l'on peut employer pour mener, d'un point donné, une normale à une conique donnée, il en est une qui exige seulement l'*emploi de la règle et du compas*. Cette méthode, trop peu connue, a été indiquée, il y a *cent soixante-dix* ans, par de la Hire, célèbre géomètre français (*). J'ai cru faire une chose utile en la reproduisant avec quelques simplifications.

(*) Nouveaux Éléments des coniques (1679).

1. Supposons que la conique soit une ellipse : les normales abaissées sur cette courbe par un point (p, q) pris dans son plan seront déterminées par les équations

$$a^2Y^2 + b^2X = a^2b^2, \qquad (1)$$

$$c^2XY - a^2pY + b^2qX = 0; \qquad (2)$$

lesquelles donnent, par l'élimination de Y :

$$X^4 - 2\frac{a^2}{c^2}pX^3 + \frac{a^2}{c^4}(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4)X^2 + 2\frac{a^4}{c^2}pX - \frac{a^6}{c^4}p^2 = 0. \quad (3)$$

2. Afin de construire les racines de cette équation, essayons de combiner l'ellipse donnée avec un cercle.

L'équation de ce cercle sera :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2; \qquad (4)$$

et si l'on cherche les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes, on trouvera qu'elles sont fournies par l'équation

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 4\frac{a^2}{c^2}\alpha x^3 + 2\frac{a^2}{c^4}[2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) + c^2k^2]x^2 - 4\frac{a^4}{c^4}k^2\alpha x \\ \qquad + \frac{a^4}{c^4}(k^4 - 4b^2\beta^2) = 0, \end{array}\right\} \quad (5)$$

dans laquelle

$$k^2 = b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

3. Maintenant, pour ramener l'équation (3) à l'équation (5), posons $X = mx$, et identifions ; il viendra :

$$\alpha = \frac{p}{2m}, \quad 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) + c^2k^2 = \frac{1}{2m^2}(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4),$$

$$k^2\alpha = -\frac{c^2p}{2m^3}, \quad k^4 - 4b^2\beta^2 = -\frac{a^2p^2}{m^4}.$$

Ces relations déterminent facilement α, β, R et m. En effet, la première et la troisième donnent $k^2 = -\dfrac{c^2}{m^2}$.

On tire ensuite de la quatrième, $\beta^2 = \frac{c^4 + a^2p^2}{4m^4b^4}$. Puis, de la seconde :

$$m^2 = \frac{a^2p^2 + c^4}{b^2q^2 + c^4}. \qquad (6)$$

Cette formule donne pour m *deux valeurs réelles*, égales et de signes contraires : comme m est un rapport, on peut convenir de prendre seulement la valeur positive. Alors

$$\alpha = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{b^2q^2 + c^4}{a^2p^2 + c^4}}, \qquad (7)$$

$$\beta = \pm \frac{b^2q^2 + c^4}{2b\sqrt{a^2p^2 + c^4}}, \qquad (8)$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + b^2 + c^2m^2. \qquad (9)$$

Le centre et le rayon de la circonférence étant connus, si l'on construit cette circonférence, et que l'on multiplie par m les abscisses des points communs aux deux courbes, on connaîtra les abscisses des pieds des différentes normales menées à l'ellipse par le point donné.

4. Si l'on pose $f = \frac{ap}{c}$, $g = \frac{bq}{c}$, on obtient :

$$m^2 = \frac{f^2 + c^2}{g^2 + c^2}, \quad \alpha = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{g^2 + c^2}{f^2 + c^2}}, \quad \beta = \pm \frac{c(g^2 + c^2)}{2b\sqrt{f^2 + c^2}};$$

et ces dernières valeurs se construisent assez simplement.

Supposons $ap = bq$. Alors $m = 1$, $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = \pm \frac{2}{2b}\sqrt{f^2 + c^2}$, $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + a^2$. En même temps, les équations (3) et (5) ont les mêmes racines ; et par conséquent, *si dans le plan d'une ellipse on prend un point tel que ses distances aux deux axes soient en raison inverse des grandeurs de ces axes, les pieds des différentes normales menées à l'ellipse par ce point seront situés sur une même circonférence.*

Il ne faut pas oublier que le point fournira quatre normales, seulement quand il sera dans l'intérieur de la *développée* de l'ellipse, laquelle a pour équation :

$$(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

3. Si le point est à l'intersection de cette développée et de la droite représentée par $ap = bq$, on aura $ap = bq = \frac{c^2}{2\sqrt{2}}$.

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient :

$$X^4 - \frac{a}{\sqrt{2}}X^3 - \frac{3}{4}a^2X^2 + \frac{a^3}{\sqrt{2}}X - \frac{a^4}{8} = 0.$$

Posons $X = \frac{a}{\sqrt{2}}t$, d'où $2t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t - 1 = 0$.

Cette équation a pour racines :

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad t_4 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2};$$

donc

$$X_1 = X_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad X_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a, \quad X_4 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a.$$

Les valeurs correspondantes de Y sont, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer :

$$Y_1 = Y_2 = -\frac{b}{\sqrt{2}}, \quad Y_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}b, \quad Y_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}b.$$

Ici, le point donné étant situé sur la développée de l'ellipse, les quatre normales se réduisent à trois ; et la circonférence qui passe par leurs pieds est tangente à l'ellipse au point (X_1, Y_1). On peut remarquer, de plus, que $X_1 + X_3 + X_4 = 0$, $Y_1 + Y_3 + Y_4 = 0$; par conséquent, *le triangle formé par les pieds des trois normales a pour centre de gravité le centre de l'ellipse.*

7. Les mêmes considérations s'appliqueraient au cas de la normale à l'hyperbole, et plus généralement à la construction des racines de l'équation du quatrième degré. Ainsi, *on peut construire les racines d'une équation du quatrième degré, à l'aide d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée et d'un cercle.*

8. Revenons au cas de l'ellipse. Au lieu de considérer l'hyperbole représentée par l'équation (2), on pourrait se proposer de construire les droites qui passent par les pieds des différentes normales, prises deux à deux. Pour cela, multiplions l'équation (1) par un facteur indéterminé λ, et ajoutons à l'équation (2), nous aurons :

$$\lambda a^2Y^2+c^2XY+\lambda b^2X^2-a^2pY+b^2qX-\lambda a^2b^2=0, \quad (10)$$

équation d'un lieu passant par les pieds des différentes normales. Cette équation, comparée à

$$AY^2+BXY+CX^2+DY+EX+F=0, \quad (11)$$

donne :

$$A=\lambda a^2,\ B=c^2,\ C=\lambda b^2,\ D=-a^2p,\ E=b^2q,\ F=-\lambda a^2b^2.$$

Or, pour que l'équation (11) représente le système de deux droites concourantes, il faut que l'on ait

$$(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF),$$

ou

$$AE^2+B^2F+CD^2-BDE-4ACF=0,$$

ou enfin

$$\lambda^3+\frac{a^2p^2+b^2q^2-c^4}{4a^2b^2}\lambda+\frac{c^2pq}{4a^2b^2}=0. \quad (12)$$

Telle est la relation à laquelle doit satisfaire le facteur λ pour que l'équation (10) représente deux droites. Cette relation, nécessaire, n'est cependant pas suffisante : il faut encore que l'on ait $B^2-4Ac>0$. Or, il est facile de reconnaître que les racines réelles de l'équation (12) sont comprises entre $+\frac{c^2}{2ab}$ et $-\frac{c^2}{2ab}$; donc $\lambda^2<\frac{c^4}{4a^2b^2}$, $c^4-4a^2b^2\lambda^2>0$;

ou, d'après les valeurs de A, B, C, $B^2 - 4AC > 0$. Il est donc certain que chaque valeur réelle de λ, tirée de l'équation (12), fournira un système de droites concourantes passant par les pieds des normales menées du point donné à l'ellipse donnée.

9. Si l'équation (12) a ses trois racines réelles, il y aura trois systèmes de droites passant par les pieds des normales; c'est-à-dire que ces droites formeront un quadrilatère complet avec ses deux diagonales, et qu'il y aura quatre normales, etc.

10. La condition de réalité des trois racines de l'équation (12) est :

$$(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4p^2q^2 < 0. \qquad (13)$$

Pour tous les points situés intérieurement à la développée de l'ellipse, on a :

$$(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}} < c^{\frac{4}{3}};$$

d'où, en élevant les deux membres à la troisième puissance :

$$a^2p^2 + b^2q^2 - c^4 + 3(abpq)^{\frac{2}{3}}[(ap)^{\frac{2}{3}} + (bq)^{\frac{2}{3}}] < 0\,;$$

et, à plus forte raison :

$$a^2p^2 + b^2q^2 - c^4 + 3(abpq)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}} < 0\,;$$

condition qui rentre dans (13). Donc cette dernière exprime que, par tout point intérieur à la développée de l'ellipse, on pourra mener quatre normales à cette courbe, etc.

11. Remarquons enfin que ce qui précède donne le moyen de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 189 (p. 298),

PAR M. JERNAIS,
de Londres.

Soient $t=f(x, y)$; $u=F(x, y)$; d'où $x=\varphi(u, t)$; $y=\psi(u, t)$; on a :

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1;$$

f'_x est la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, et ainsi des autres. (Möbius.)

L'élément différentiel $dtdu$, transformé en x et y, devient, comme l'on sait, $(f'_x F'_y - f'_y F'_x) dxdy$; et de même, si l'on veut revenir de cette dernière expression aux variables primitifs t et u, il faudra substituer pour $dxdy$, $\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) dudt$; d'où il s'ensuit évidemment que

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. M. Loxhay (de Bruxelles) a adressé une solution entièrement conforme à celle de M. Murent (p. 298).

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1848 (*V.* t. VI, p. 339).

Composition d'analyse.

1° Parmi toutes les courbes planes de longueur donnée aboutissant à deux points donnés, déterminer celle qui a le plus grand moment d'inertie par rapport à la droite qui joint les deux points; évaluer l'aire comprise entre cette droite et

la courbe, et la surface que la courbe engendre en tournant autour de la même droite.

2° Expliquer brièvement la méthode par laquelle on rend maximum ou minimum une intégrale définie quand une autre intégrale définie doit avoir une valeur donnée.

Composition de mécanique.

Un cylindre droit à base circulaire, de matière hétérogène, mais dont tous les points situés sur une même droite parallèle à l'axe ont la même densité et dont le centre de gravité est hors de l'axe, est posé sur un plan horizontal sans vitesse initiale; déterminer le mouvement que prend ce corps sous l'action de la pesanteur quand on néglige le frottement, et en particulier le mouvement du centre de gravité et celui d'un point quelconque du rayon du cylindre qui passe par ce centre (*).

Composition du jury d'examen.

MM. Cournot, inspecteur général de l'Université;
Sturm, membre de l'Académie des sciences;
Briot, professeur à la Faculté de Lyon;
Cazalès, inspecteur général de l'Université;
Amiot, professeur au lycée Monge.

Note. Pour la première question, on ne saurait trop instamment recommander aux jeunes professeurs l'étude d'un chef-d'œuvre d'Euler, intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, etc., Lauzanne, 1744, in-4°. C'est l'exposition *géométrique* la plus lucide du calcul des variations. M. Cournot a traité la question de mécanique avec beaucoup d'étendue et de généralité; malheureusement ce mémoire, consigné dans le Journal de Crelle, n'est pas répandu en France. Nous engageons aussi à lire la belle thèse de M. Briot, où les théorèmes *pittores-*

(*) Bien entendu que le cylindre touche le plan par une arête.

ques de mécanique de M. Poinsot sont démontrés analytiquement. (Liouville, t. VI, p. 70-84, 1841.)

Le savant travail que M. Bertrand vient de présenter à l'Académie (C. R. août) appellera sans doute l'attention sur le cas où le corps est en mouvement sur une surface elle-même en mouvement; seul cas réellement existant, puisque la terre est en mouvement.

SOLUTION DE LA QUESTION 188 (p. 240),

PAR M. TH. LOXHAY,
de Bruxelles.

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=d^2,$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=d^2.$$

Les axes étant rectangulaires, ces deux équations sont celles de deux ellipsoïdes égaux. (Jacobi.)

Je remarque d'abord que la deuxième équation se déduit de la première, en permutant b, c, a', c', a'' et b'' respectivement en a', a'', b, b'', c et c'. Maintenant, puisque ces deux équations ne contiennent pas de termes du premier degré, les surfaces ont chacune le centre à l'origine; or on sait (voyez Lefébure de Fourcy, *Géométrie analytique*, n° 693) que pour de telleséquations les longueurs des axes sont données par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, λ étant déterminé par l'équation :

$$\lambda^3+L\lambda^2+M\lambda+N=0. \qquad (1)$$

En calculant les coefficients pour la première équation, il vient :

$$L=-\frac{a^2+a'^2+a''^2+b^2+b'^2+b''^2+c^2+c'^2+c''^2}{d^2}$$

$$\frac{aa'bb'+aa''bb''+a'a''b'b''+aa'cc'+aa''cc''+a'a''c'c''+bcb'c'+bcb''c''+b'c'b''}{d^4}$$

$$\mathrm{N}=-\frac{[a(b'c''-b''c')+a'(bc''-b''c)+a''(bc'-b'c)]^2}{d^6}$$

et l'équation (α) devient :

$$\lambda^3-\left(\frac{a^2+a'^2+a''^2+b^2+b'^2+b''^2+c^2+c'^2+c''^2}{d^2}\right)\lambda^2+$$

$$\frac{a'bb'+aa''bb''+a'a''b'b''+aa'cc'+aa''cc''+a'a''c'c''+bcb'c'+bcb''c''+b'c'b''c'')}{d^4}\lambda$$

$$-\frac{[a(b'c''-b''c')+a'(bc''-b''c)+a''(bc'-b'c)]^2}{d^6}=0. \quad (\alpha')$$

En faisant les permutations annoncées pour passer à la deuxième surface, l'équation (α') ne subit aucun changement; donc les deux surfaces ont les mêmes axes. De plus, l'équation (α') n'a que des variations, et puisqu'elle a toutes ses racines réelles, d'après la règle de Descartes, elles sont toutes les trois positives; donc elle représente un ellipsoïde, et partant les deux surfaces sont des ellipsoïdes égaux.

DEUX THÉORÈMES DE STATIQUE DE M. MÖBIUS

(*V.* p. 257),

PAR M. DELADERRERE,

Professeur.

I. Une force quelconque peut toujours être remplacée par six forces appliquées selon les six arêtes d'un tétraèdre.

Car il y a au plus deux faces auxquelles elle est parallèle. Prenons l'une de celles qu'elle rencontre pour base, joignons le point de rencontre au sommet, et menons un plan suivant cette droite et la direction de la force, il coupera la base suivant une autre droite, ce qui donnera deux directions,

suivant lesquelles on pourra décomposer la force par la règle du parallélogramme; la force qui passe par le sommet pourra se décomposer en trois autres, selon les trois arêtes, par la règle du parallélipipède. Quant à celle qui est dans le plan de la base, il y aura au plus un côté de cette base auquel elle sera parallèle. Prenons l'un de ceux qu'elle rencontre pour base du triangle, joignons le point de rencontre au sommet, nous pourrons toujours, par la règle du parallélogramme, décomposer la force en deux autres, l'une selon la base, l'autre selon la droite qui va au sommet, et celle-ci pourra se décomposer en deux autres selon les deux côtés, toujours par la règle du parallélogramme; et ainsi se trouve démontré le théorème.

II. Lorsque n forces se font équilibre et qu'une droite en rencontre $n-1$, elle rencontre la $n^{ème}$; car la somme de leur moment par rapport à la droite étant nulle, ainsi que les plus courtes distances des $n-1$ premières forces à cette droite, il faudra que la plus courte distance entre la $n^{ème}$ et la droite soit aussi nulle; donc

Corollaire. Lorsque quatre forces se font équilibre, elles sont des génératrices du même système d'un même hyperboloïde.

CONCOURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1848),

PAR M. DIEU,
Agrégé de l'Université, à Dijon.

Problème de statique.

Déterminer la position d'équilibre d'une tige pesante MM', de longueur l et de poids P, dont les extrémités sont assu-

jetties à rester sur deux droites fixes, dont l'une est verticale et l'autre dans une direction quelconque.

(*Fig.* 49). Soient Oz la verticale et RS l'oblique fixes ; en prenant pour axe des x la direction de leur plus courte distance, les équations de RS sont

$$x = p, \quad y = bz. \qquad (1)$$

Soient MM' la position d'équilibre, z l'ordonnée de M et x', y', z' les coordonnées de M', on a :

$$x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2 = l^2. \qquad (2)$$

On peut faire abstraction des droits fixes, pourvu qu'on applique à la tige en M et M', des forces r et r' respectivement normales à ces droites, égales et contraires aux pressions qu'elles supportent ; la première est parallèle à $\widehat{xy}$, donc sa direction est déterminée par l'angle α que sa projection sur ce plan fait avec Ox ; la direction de la seconde le sera par les angles α', β', γ' qu'elle fait avec les trois axes.

On a : $$b \cos \beta' + \cos \gamma' = 0, \qquad (3)$$

pour exprimer que r' est normale à RS.

La translation de r, r' et P à l'origine ne fournit qu'un couple dirigé dans le plan $\widehat{xy}$, dont le moment est

$$r'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') ;$$

par conséquent on doit avoir $\frac{y'}{x'} = \frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'}$ pour que l'équilibre ait lieu, et r' est dirigée dans le plan OMM' ; donc ce plan doit contenir aussi la direction de r, puisque celle de P y est comprise, et P doit être égale et directement opposée à la résultante de r et r'.

Soient HT et HC deux lignes représentant en grandeur et en direction les forces r et r' rapportées à leur point de concours ; la diagonale HB du parallélogramme HFBC représente une force égale et contraire à P.

Cela posé, HBC rectangle en B donne :

$$r'^2 = P^2 + r^2 \quad \text{et} \quad \cos\gamma' = \frac{P}{r'};$$

et les triangles semblables HBC, HDM' donnent :

$$r = P\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{2(z-z')}, \quad r' = P.\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}{2(z-z')}$$

donc,

$$\cos\gamma' = \frac{2(z-z')}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}};$$

et l'on a, par

$$\cos\beta' = \frac{y'}{x'}\cos\alpha' \quad \text{et} \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

$$\cos\alpha' = \frac{-x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}.$$

D'après cela, l'équation (3) donne :

$$z - z' = \frac{by'}{2},$$

et (2),

$$x'^2 + \left(1 + \frac{b^2}{4}\right)y'^2 = l^2.$$

Cette dernière représente un cylindre elliptique qui coupera RS dans les positions qu'on pourra donner à M'. En y remplaçant x' par p et y' par bz' [équation (1)], il vient :

$$z' = \pm\frac{1}{b}\sqrt{\left(\frac{l^2-p^2}{1+\frac{1}{4}b^2}\right)},$$

pour les coordonnées $\hat{z}$ de ces points, et l'on a la condition que l ne soit pas inférieur à p pour que le problème soit possible, ce qui est évident *à priori* : si $l > p$, il y aura deux solutions et si $l = p$, il n'y aura pas de position d'équilibre,

car alors r et r' seraient dirigées suivant la tige elle-même et ne pourront avoir une résultante égale et contraire à P.

Enfin les expressions précédentes feront connaître toutes les autres inconnues de la question.

THÉORÈME SUR LE TORE

de M. Villarceau (Yvon).

—

I. *Lemme.* 1° Soit $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2=0$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires, M un point de cette ellipse et T le point de rencontre de la tangente menée en M et de l'axe des x, β étant l'angle que forme cette tangente avec l'axe des x et p la distance du point T au centre, on a :

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{b}{\sqrt{p^2-a^2}}.$$

2° Pour l'hyperbole $a^2z^2-b^2x^2+a^2b^2=0$, on a :

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2-p^2}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta=\frac{a}{\sqrt{b^2+p^2}}$$

dans l'hyperbole conjuguée. 3° Pour la parabole $z^2=qx^2$:

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}};$$

p est la distance de T au sommet.

II. *Lemme.* 1° soit $a^2z^2+b^2(x-p)^2=a^2b^2$ l'équation d'une ellipse dans un plan vertical ; si cette ellipse tourne autour d'une verticale passant par l'origine et qu'on prend pour axe des z, l'équation de la surface de révolution est

$$[a^2z^2+b^2(y^2+x^2+p^2-a^2)]^2=4p^2b^4(x^2+y^2).$$

2° Pour l'hyperbole :

$$[a^2z^2-b^2(y^2+x^2+p^2-a^2)]^2=4p^2b^4(x^2+y^2)$$

tournant autour de l'axe focal et

$$[b^2z^2+a^2(x^2+y^2-b^2-p^2)]^2=4a^4p^2(x^2+y^2),$$

hyperbole conjuguée. 3° Pour la parabole :

$$z^2=q(x-p),\quad (z^2+pq)^2=q^2(x^2+y^2).$$

III. *Problème.* Dans quel cas un plan diamétral coupe-t-il l'une quelconque de ces trois surfaces suivant des coniques?

Solution. 1° *Ellipse.* On peut supposer que le plan passe par l'axe des y ; alors son équation est $z=\alpha x$, la projection de l'intersection sur le plan xy, a donc pour équation :

$$[x^2(a^2\alpha^2+b^2)+b^2(y^2+p^2-a^2)]^2=4p^2b^4(x^2+y^2).$$

Passant aux coordonnées polaires, il vient :

$$\rho^2(a^2\alpha^2\cos^2\varphi+b^2)+b^2(p^2-a^2)=2pb^2\rho,$$
$$\rho^2(a^2\alpha^2+b^2)-2pb^2\rho+b^2(p^2-a^2)=a^2\alpha^2\rho^2\sin^2\varphi.$$

Pour que le premier membre devienne un carré parfait, il faut prendre $\alpha^2(p^2-a^2)=b^2$ (1) ; donc $\alpha=\text{tang}\,\beta$, et le plan diamétral est tangente à la surface. Substituant cette valeur de α et extrayant la racine carrée, il vient :

$$p\rho-p^2+a^2=\pm a\rho\sin\varphi;$$

et passant aux coordonnées rectangulaires

$$p^2(y^2+x^2)=(p^2-a^2\pm ay)^2,$$
$$y^2(p^2-a^2)+p^2x^2\pm 2ay(p^2-a^2)=(p^2-a^2)^2. \quad (1)$$

La projection sur le plan xy étant une ellipse, la courbe projetée est aussi une ellipse ; les centres des deux ellipses sont sur l'axe des y, et à une distance $+a$ du centre de la surface ou de l'origine ; les deux axes de l'ellipse en projec-

tion sont p et $\sqrt{p^2-a^2}$, et ceux de l'ellipse projetée sont p et $\sqrt{b^2+p^2-a^2}$. Si donc A est le point ou l'axe des y coupe la surface intérieurement, A′ le point où cet axe coupe extérieurement; désignons de même pour B et B′ les points d'intersection du côté opposé; alors l'ellipse projetée va de A en B′ et une seconde ellipse, correspondant à $-a$, va de A′ en B et les deux ellipses se coupent en un point dont l'abscisse de la projection est $\frac{p^2-a^2}{p}$ et dont la distance à l'origine est $\frac{\sqrt{(p^2-a^2)(b^2+p^2-a^2)}}{p}$.

2° *Hyperbole.* 1° *L'axe de rotation est perpendiculaire au diamètre focal.* Il suffit de changer partout $+b^2$ en $-b^2$; on retombe sur la même équation (1); mais p^2-a^2 étant négatif, cette équation est celle d'une hyperbole; 2° l'axe de rotation est parallèle au *diamètre focal*. Le plan diamétral tangent coupe suivant une ligne du quatrième degré qui ne se décompose pas en deux coniques.

3° *La parabole.* La section est évidemment une parabole, puisque alors p devient infini.

IV. *Théorème.* Le cylindre droit, de même axe que le tore et ayant pour base le cercle directeur, divise la surface du tore en deux parties, intérieure et extérieure; l'une diffère par excès et l'autre par défaut, de la surface totale, d'une surface égale à celle de la sphère qui a pour diamètre celui du cercle générateur; de même pour les volumes.

Démonstration. Ce beau théorème aussi de M. Villarceau est une conséquence du théorème de Guldin.

Note. M. Villarceau a énoncé son théorème sur le tore circulaire à la Société philomatique au mois de juillet dernier, et depuis M. Théod. Olivier a énoncé à la même Société le théorème généralisé (III).

THÉORÈME DE MASCHERONI

sur l'aire d'un polygone rectiligne plan.

—

I. *Notation.* Les angles intérieurs consécutifs du polygone sont désignés par les lettres consécutives A, B, C, D... L, M, N, et les angles extérieurs correspondants par A′, B′, C′, D′... L′, M′, N′; de sorte que pour un angle saillant A, l'on a $A'=\pi-A$, et pour un angle rentrant $A'=A-\pi$, et ainsi des autres. Chaque côté est indiqué dans l'ordre naturel des lettres et non à l'inverse : ainsi AB, CD... et non BA ou DC. Cette observation est importante pour l'application de la formule.

II. *Lemme.* $A'+B'+C'+\ldots L'+M'+N'=2\pi$; ainsi le sinus de la somme d'un nombre quelconque de ces angles extérieurs est égal au sinus de la somme des angles restants, ce sinus étant pris négativement.

III. *Théorème.* Le double de la surface d'un polygone rectiligne est égal à la somme des rectangles de ses côtés, excepté un, pris deux à deux par les sinus des sommes des angles extérieurs compris entre eux.

Démonstration. Soit S l'aire :

1° *Triangle.* ABC; $2S=AB.BC.\sin B'$.

2° *Quadrilatère.* ABCD (*fig.* 47). Menons la diagonale AC; prolongeons les côtés AB, CD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en O, et abaissons les perpendiculaires AP et BQ sur le côté CD, on a :

$$ABCD=ABC+ACD\,;$$

$$2ACD=CD.(AB+BO)\sin O=AB.CD\sin(B'+C')+CD.BQ;$$

$$CD.BQ=BC.CD.\sin C'\,;$$

donc

$$2S = AB.BC \sin B' + AB.CD \sin (B' + C') + BC.CD \sin C'.$$

IV. *Pentagone.* ABCDE (*fig.* 48). Menons la diagonale AD; prolongeons les côtés AB et DE jusqu'à leur rencontre en O, et abaissons sur DE les perpendiculaires AP et BQ; le pentagone est décomposé en un quadrilatère ABCD et en un triangle ADE. Le double de l'aire du quadrilatère s'exprime d'après la combinaison binaire des trois côtés AB, BC, CD, et l'on a :

$$2ADE = DE.OB \sin O - DE.AB \sin O;$$

$$DE.OB \sin O = DE.BQ = 2.EBD = 2.BCDE - 2BCD;$$

mais BCDE s'exprime en combinaison binaire des côtés BC, CD, DE; il faut donc en ôter $BC.CD \sin C'$ pour avoir l'aire EBD, et remarquant que

$$AB.DE \sin O = -AB.DE \sin (B' + C' + D'),$$

il vient donc finalement :

$$2S = AB.BC \sin B' + AB.CD \sin (B' + C') + AB.DE \sin (B' + C' + D') +$$
$$+ BC.CD \sin C' + BC.DE \sin (C' + D') + CD.DE \sin D'.$$

V. *Généralement.* Soit le polygone ABCDE... LMN de n côtés; on mène la diagonale AM; le polygone est décomposé en un polygone ABCDE...LM de $n-1$ côtés et en un triangle AMN. Supposons que la loi ait lieu pour un polygone de $n-1$ côtés, on a donc les combinaisons binaires des côtés AB, BC... LM, et l'aire du triangle AMN amène les combinaisons du côté MN, successivement avec AB, BC... LM.

Observation. Dans nos figures, tous les angles sont saillants; mais il est aisé de s'assurer que la formule comprend également les angles rentrants.

VI. On voit qu'un polygone de n côtés exige $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ multiplications, mais on peut diminuer ce nombre; soit

$n = 2m$; on mène une diagonale qui partage le polygone en deux autres, chacun de $m+1$ côtés, la diagonale comprise; l'aire de chacun de ces polygone demande $\frac{m(m-1)}{1.2}$, et les deux ensemble $m(m-1)$ multiplications, nombre qui est moindre que $(2m-1)(m-1)$; si $n=2m+1$, on opère de même.

VII. *Historique.* En 1787, L. Mascheroni, parmi des additions au Cours de mathématiques de Bossut, publia un mémoire intitulé : *Méthode pour la mesure des polygones plans*. C'est dans ce mémoire que Mascheroni énonce et démontre son théorème analytiquement. Deux années après, Simon Lhuilier fit paraître sa Polygonométrie (*); il parvient au même théorème par des considérations trigonométriques (1 — 12). Enfin Mascheroni publia à Pavie, en 1793, une *collection de problèmes pour les arpenteurs, avec différentes solutions*, ouvrage qui a été traduit de l'italien en 1803 et sous ce titre par M. Carette, ancien colonel du génie, élève de l'an III (1794), première promotion de l'École polytechnique. L'ouvrage est divisé en cinq livres; le quatrième traite de la polygonométrie, et le théorème sur l'aire des polygones est énoncé à la page 771. Il est surprenant qu'une proposition d'une utilité pratique si grande, si évidente, ait été omise dans les éléments, même par Legendre, et soit restée presque ignorée. Il en est de même des autres propositions de cet ouvrage remarquable; destinées aux arpenteurs, toutes sont énoncées sans démonstration. La recherche de ces démonstrations est un excellent sujet d'exercice pour les professeurs à donner aux élèves. Le livre cinquième, consa-

(*) Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et Abrégé d'isopérimétrie élémentaire, ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures, par S. L'Huilier, aux dépens de l'auteur, à Genève, 1789, in-4., IV, 124, 2 pl.

cré aux *solides*, renferme l'énoncé de M. Finck (*V.* p. 242). Voici quelques renseignements sur l'auteur.

Mascheroni (Laurent), né à Bergame en 1750, embrassa l'état ecclésiastique et occupa une chaire de langue grecque à l'Université de Pavie. Ce n'est qu'à l'âge de vingt-sept ans qu'il prit goût pour les mathématiques et commença à les cultiver avec de rapides progrès. En 1795, il publia à Milan la *Geometria del compasso*, qui a donné tant de célébrité à son nom; le premier exemplaire a été apporté en France par Bonaparte, alors général de l'armée d'Italie. On doit encore à M. Carette une traduction qui a paru en 1798. Mascheroni a fait aussi un travail estimé sur les voûtes, et est venu à Paris pour prendre part à l'établissement du système métrique; il est mort exténué de fatigues en 1808, à l'âge de cinquante-huit ans. L'illustre géomètre a fait pour le *compas* ce que Lambert a fait en 1774 pour la *règle*, dans les additions jointes à la seconde édition de sa Perspective. On a une traduction de la première édition, mais les additions concernant la géométrie de la règle (p. 161) n'ont pas été traduites. Nous nous en occuperons dans les *Annales*.

VIII. On sait qu'ayant un système de forces représentées en grandeur et en direction par les côtés d'un polygone et agissant dans le sens de ces côtés prolongés dans le même sens, la résultante est un couple dont l'intensité est le double de l'aire du polygone. Il serait commode de pouvoir déduire de cette considération de statique le théorème de Mascheroni.

IX. *Application*. Hexagone ABCDEF.

AB = 1284	B′ = 32°	S = 16530191 (*Polygonométrie*, de Lhuilier, p. 57 et 59)
BC = 1782	C′ = 48°	
CD = 2400	D′ = 52°	
DE = 2700	E′ = 63°	
EF = 2860		

Au moyen de l'observation VI, on peut obtenir l'aire S au moyen de six produits, dont chacun se calcule par logarithmes; un autre calcul donne $F = 88^{\circ}\ 31'\ 37'',8$ et $AF = 4621,5$.

THÉORIE GÉNÉRALE

des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjugués, des lignes et surfaces du deuxième ordre,

PAR M. LENTHÉRIC, NEVEU,
Professeur.

—

§ I.

I. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + K = 0 \quad \text{ou} \quad F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

l'équation générale des lignes de deuxième ordre.

On sait que, lorsqu'on mène une tangente à la courbe par un point α, β de son plan, les coordonnées du point de contact sont déterminées par les deux équations :

$$F(x, y) = 0, \quad F'_y(\beta - y) + F'_x(\alpha - x) = 0.$$

La seconde, ajoutée au double de la première, s'abaisse au premier degré et devient :

$$\beta F'_y + \alpha F'_x + Dy + Ex + 2K = 0, \qquad (2)$$

équation d'une droite passant sur les deux points de contact, et que nous appellerons la *corde de contact*.

Cela posé, supposons que le point α, β, par lequel on mène la tangente, se meuve sur une droite

$$y = mx + n \qquad (3)$$

située d'une manière quelconque dans le plan de la courbe,

on aura entre α et β la relation $\beta = m\alpha + n$; et substituant cette valeur de β dans l'équation (2), il en résultera :

$$(mF'_y + F'_x)\alpha + nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0, \qquad (4)$$

qui sera l'équation générale de toutes les cordes de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (3).

Or, la forme seule de l'équation (4) montre que toutes les droites qu'elle représente se coupent en un même point sur la droite fixe

$$mF'_y + F'_x = 0,$$

car les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec l'une quelconque de celles que représente l'équation (4), en faisant varier α, sont données par les deux équations :

$$mF'_y + F'_x = 0 \qquad (5)$$
$$nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0, \qquad (6)$$

qui ne contiennent pas la variable α.

L'équation (5) représentant, comme l'on sait, le diamètre conjugué de la direction $y = mx$, qui est celle de la droite donnée, il en résulte ce théorème, découvert par La Hire :

Si sur tous les points d'une droite située d'une manière quelconque dans le plan d'une ligne du deuxième ordre on mène des tangentes à la courbe : 1° toutes les cordes de contact concourront en un même point; 2° ce point sera situé sur le diamètre conjugué de la direction de la droite.

Ce point a été appelé, par M. Servois, le pôle de la droite; et l'on voit qu'à une droite quelconque, donnée sur le plan de la courbe, correspondra toujours un pôle dont les équations (5) et (6) détermineront les coordonnées en y remplaçant m et y par les coefficients de la droite donnée.

II. Réciproquement soient a, b les coordonnées d'un point quelconque du plan de la courbe; en faisant $x = a$, $y = b$ dans les équations (5) et (6), on en déduira $m = -\frac{F'_a}{F'_b}$,

$y = -\frac{Db + Ea + 2K}{F'_b}$; et substituant ces valeurs dans (3), il en résultera une droite

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0, \tag{7}$$

qui aura pour pôle le point $(a.b)$; d'où résulte cet autre théorème réciproque du précédent :

Si par un point quelconque du plan d'une courbe de deuxième ordre on mène des sécantes à la courbe et que sur les points d'intersection de chacune d'elles on mène des tangentes : 1° les points de concours des tangentes, qui correspondent à la même sécante, seront sur une même droite ; 2° cette droite sera parallèle au conjugué du diamètre qui passe par ce point.

Cette droite a été appelée, par M. Gergonne, la *polaire* du point, et on voit qu'à un point quelconque du plan de la courbe correspondra toujours une polaire, dont on obtiendra l'équation en remplaçant dans (7) a et b par les coordonnées de ce point.

III. La polaire étant $y = mx + n$ (3), nous avons vu que le pôle était déterminé par les deux équations :

$$mF'_y + F'_x = 0 \ (5), \quad nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0 \ (6),$$

donc chacune ne contient que l'une des constantes m et n de la polaire. Il résulte de là :

1° Que (5) est le lieu géométrique des pôles de la droite (3) lorsque m restant constant on fait varier n ; mais alors la polaire se meut parallèlement à elle-même, et (5) est le diamètre conjugué de la direction ; donc :

Le lieu géométrique des pôles d'un système de droites parallèles est le diamètre conjugué à leur direction.

2° Que (6) est le lieu géométrique des pôles de la droite (3) lorsque n restant constant, on y fait varier m ; mais alors la droite (3) passe constamment par le point fixe (o, n), et l'é-

quation (7) montre que l'équation (6) est la polaire du point fixe ; donc :

Le lieu géométrique des pôles d'un système de droites qui se coupent au même point, est la polaire de ce point.

Et de ces deux théorèmes nous pouvons conclure réciproquement les deux suivants :

Si le pôle se meut suivant un diamètre, la polaire se meut parallèlement à son conjugué.

Si le pôle se meut suivant une droite quelconque du plan de la courbe, la polaire tourne autour du pôle de cette droite.

IV. Cherchons maintenant la position relative du pôle et de la polaire sur le plan de la courbe ; comme elle est évidemment indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels, que celui des x soit le diamètre conjugué de la polaire et par conséquent passe par le centre et le pôle, et que celui des y soit une tangente parallèle à la polaire ; alors l'équation (1) de la courbe se réduira à la forme :

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex = 0.$$

L'abscisse du centre sera donnée par l'équation dérivée en x :

$$2Cx + E = 0, \text{ d'où } x = -\frac{E}{2C};$$

cette abscisse sera la longueur du demi-diamètre conjugué de la polaire ; en représentant cette longueur par d, on aura :

$$d = -\frac{E}{2C}.$$

L'équation (7) de la polaire, rapportée aux nouveaux axes, deviendra :

$$(2Ca + E)x + Ea = 0, \text{ d'où } x = -\frac{Ea}{2Ca + E};$$

x désignant la distance de la polaire à l'origine. Appelant δ la

distance de la polaire au centre, on aura $\mu = -\frac{Ea}{2Ca+E} + \frac{E}{2C}$, ou réduisant :

$$\mu = \frac{E^2}{2C(2Ca+E)}.$$

La distance du pôle à l'origine étant a, en appelant μ' la distance du pôle au centre, on aura $\mu' = a + \frac{E}{2C}$, ou réduisant :

$$\mu' = \frac{2Ca+E}{2C};$$

or, en faisant le produit des deux distances μ, μ', il vient $\mu \times \mu' = \frac{E^2}{4C^2}$; et comme $d = -\frac{E}{2C}$ donne aussi $d^2 = \frac{E^2}{4C^2}$, il en résulte cette relation remarquable :

$$\mu \times \mu' = d^2. \qquad (8)$$

Ainsi, dans les courbes qui ont un centre, c'est-à-dire *dans l'ellipse ou l'hyperbole, le pôle d'une droite est situé sur le diamètre conjugué de la direction de cette droite, de manière que le demi-diamètre est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et du centre à la droite, ces distances étant mesurées sur le diamètre.*

Dans le cas de la parabole, on a de plus $C=0$, et l'équation de la polaire se réduira à $x = -a$; ainsi :

Dans la parabole, la partie du diamètre comprise entre le pôle et la droite a son milieu sur la courbe.

Cette propriété de la parabole et la relation (8) donnent un procédé très-simple pour construire, soit la polaire lorsque l'on connaît le pôle, soit le pôle lorsque l'on connaît la polaire, dans chacune des courbes du deuxième degré.

Pour le cercle, le diamètre serait perpendiculaire à la polaire, et la relation (8) aurait toujours lieu.

Ce qui précède conduit à ces conséquences, qu'il suffira d'é-

noncer : *La polaire étant extérieure, le pôle est intérieur, et réciproquement ; la polaire s'éloignant du centre, le pôle s'en rapproche, et réciproquement ; la polaire passant par le centre, le pôle est à l'infini, et réciproquement ; la polaire étant tangente, le pôle est au point de contact, et réciproquement ; si le pôle est sur la courbe, la droite est tangente dans ce point.*

On sait que la relation (8) existe pour l'ellipse et l'hyperbole entre le demi-grand axe et les distances du centre au foyer et à la directrice voisine ; on sait que dans la parabole le sommet est à égale distance du foyer et de la directrice ; ainsi :

Dans toutes les courbes du deuxième ordre, la directrice a pour pôle le foyer ; ce qui justifie la dénomination de *polaire focale*, que M. Poncelet a proposé, avec raison, de donner à la directrice.

V. Revenons à l'équation de la polaire :

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0; \quad (7)$$

en y remplaçant F'_b et F'_a par leurs valeurs, elle devient :

$$(2Ab + Ba + D)y + (Bb + 2Cx + E)a + Dy + Ex + 2K = 0,$$

et ordonnant par rapport à a et b :

$$(2Ay + Bx + D)b + (By + 2Ca + Ex) + Db + Ex + 2K = 0,$$

ou $$bF'_y + aF'_x + Dy + Ex + 2K = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (2) de la corde de contact relative au point $\alpha.\beta$, on voit que :

La polaire d'un point est la corde de contact qui correspond à ce point ; donc *le pôle d'une droite est l'intersection commune des polaires de tous les points*, et par conséquent *si un point est situé sur une droite, la polaire passe sur le pôle de cette droite*, ce que nous savions déjà (3).

Réciproquement *le point de concours de deux tangentes est le pôle de la corde de contact ;* donc *la polaire d'un point est le lieu géométrique des pôles de toutes les droites qui passent sur*

ce point; par conséquent, *si une droite passe par le pôle d'une autre droite, son pôle se trouvera sur cette autre droite*, ce que nous savions déjà (3).

VI. L'identité de l'équation de la polaire d'un point avec la corde de contact relative à ce point, ayant lieu quelle que soit la position du point et par conséquent lors même que la corde de contact n'existerait pas, nous devons en conclure que la polaire est un lieu géométrique dont la corde de contact n'est qu'un cas particulier.

Et en effet, soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + K = 0$, (1) l'équation des lignes de deuxième ordre rapportées à des axes quelconques, appelons $\alpha.\alpha'$ les longueurs des segments compris sur l'axe des x entre l'origine et la courbe; ces longueurs seront les racines de l'équation du deuxième ordre, que l'on obtient en faisant $y = 0$ dans (1), ce qui donne :

$$Cx^2 + Ex + K = 0,$$

on aura donc :

$$\alpha + \alpha' = -\frac{E}{C}, \quad \alpha\alpha' = \frac{K}{C}.$$

De même $\beta.\beta'$ désignant les longueurs des segments sur l'axe des y, qui sont données par l'équation du deuxième degré

$$Ay^2 + Dy + K = 0,$$

on aura :

$$\beta + \beta' = -\frac{D}{A}, \quad \beta\beta' = \frac{K}{A}.$$

La droite qui détermine sur les axes deux des segments $\alpha.\beta'$, a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta'} = 1;$$

de même celle qui détermine les deux autres segments $\alpha'.\beta$, a pour équation

$$\frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

En ajoutant les équations des deux droites, il en résultera celle d'une troisième droite, qui passera par le point de concours des deux premières; donc les deux droites se coupent sur la troisième droite :

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}x+\frac{\beta+\beta'}{\beta\beta'}y=2.$$

Cette équation, en substituant pour $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ leurs valeurs ci-dessus, devient :

$$Dy+Ex+2K=0,$$

et l'équation (7) fait voir qu'elle représente la polaire de l'origine; donc sa position est indépendante de la direction des axes, et il en résulte cette conséquence :

Si par un point fixe pris arbitrairement sur le plan d'une courbe de deuxième ordre, on mène deux sécantes quelconques à la courbe et que l'on joigne par des cordes un point de section de l'une des sécantes avec un point de section de l'autre, et de même les deux autres points de section, le lieu géométrique des intersections de ces cordes, lorsque l'on fera tourner les sécantes autour du point fixe, sera une droite qui aura le point fixe pour pôle.

Donc, si parmi ces sécantes deux peuvent devenir tangentes, les points de contact seront sur la polaire et en détermineront la position, ce qui explique l'identité de l'équation de la polaire avec celle de la corde de contact.

C'est de ce théorème, qui pourrait servir de point de départ à cette théorie, que l'on rendrait ainsi indépendante de celle des tangentes, que dérive la dénomination de pôle (du verbe grec qui signifie *tourner*), introduite en 1811 par M. Servois dans la science.

Il en résulte un procédé facile pour construire, *avec la règle seulement*, soit la polaire lorsque le pôle est donné, soit le pôle lorsque la polaire est donnée.

En effet, si par un point on mène deux sécantes à la courbe, les cordes qui joindront les points d'intersection réciproques deux à deux, se couperont sur la polaire du point et en détermineront la position.

Si une droite étant donnée, on conduit, comme nous venons de l'expliquer, les polaires de deux points de cette droite, ces polaires passeront pas le pôle de la droite et le détermineront par leur intersection.

N. B. Deux droites qui se coupent ou deux parallèles n'étant que des cas particuliers des courbes que comprend l'équation générale (1), chacun des théorèmes que nous avons établis donne un théorème correspondant de la théorie des transversales. (*La fin prochainement.*)

QUESTIONS D'INTÉRÊTS COMPOSÉS,

impôt progressif sur les successions, d'après M. C. Lamé (Compte rendu 1848, 2e sem., p. 125).

I. *Problème.* Un travailleur fait chaque année a francs d'économie, et il place cette épargne annuelle à intérêt de r pour *un*; au bout de combien n d'années aura-t-il un capital dont le revenu annuel soit égal à son épargne annuelle?

Solution. Au bout de n années, les épargnes placées vaudront :

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\ldots a(1+r)^{n-1}=\frac{a}{r}[(1+r)^n-1];$$

or le capital qui rapporte a d'intérêt annuel est $\frac{a}{r}$, donc

$$\frac{a}{r}[(1+r)^n-1]=\frac{a}{r};\ \text{d'où l'on tire } n=\frac{\log 2}{l(1+r)}.$$

Observation. Si la somme a suffit aux besoins annuels du travailleur, il pourra se retirer après n années et vivre de la rente annuelle de son capital.

II. *Problème.* Mêmes données que le problème précédent; on demande combien d'années n' il doit encore travailler après les n années pour que le capital rapporte une rente double de l'épargne annuelle ?

Solution. Le capital acquis $\frac{a}{r}$ vaudra au bout de n' années $\frac{a}{r}(1+r)^{n'}$, et les épargnes annuelles vaudront $\frac{a}{r}[(1+r)^{n'}-1]$; on a donc :

$$\frac{a}{r}(1+r)^{n'}+\frac{a}{r}[(1+r)^{n'}-1]=\frac{2a}{r}; \text{ d'où } n'=\frac{\log\frac{3}{2}}{l(1+r)}.$$

Observation. On a $n'<n$; ainsi il faut moins d'années pour acquérir le second capital $\frac{a}{r}$ que pour le premier, ce qui est évident *à priori*. Si donc $\frac{2a}{r}$ suffisent à la dépense annuelle, le travailleur pourra se retirer après $n+n'$ années.

III. *Problème.* Mêmes données; combien d'années doit-il encore travailler pour acquérir un capital qui rapporte $3a$?

Solution. On a $\frac{2a}{r}(1+r)^{n''}+\frac{a}{r}[(1+r)^{n''}-1]=\frac{3a}{r}$; d'où :

$$n''=\frac{\log\frac{4}{3}}{l(1+r)}.$$

Observation. On a $n''<n'<n$; le troisième capital $\frac{a}{r}$ est donc plus tôt gagné que le second.

IV. *Facilités d'acquisition. Moins* il faut d'années pour former un capital, et *plus* la facilité est grande; si donc nous

convenons de représenter par 1 la facilité d'acquérir le premier capital $\frac{a}{r}$, les facilités d'acquérir les capitaux $\frac{2a}{r}$, $\frac{3a}{r}$, etc., seront présentées par $\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$, $\frac{\log 2}{\log \frac{4}{3}}$, $\frac{\log 2}{\log \frac{5}{4}}$, etc.

V. *Succession.* Parmi tous les êtres organisés de la création, l'homme est le seul qui ait le sentiment de son existence passagère. La quantité de travail nécessaire pour subvenir aux besoins d'une vie courte et précaire est assez restreinte ; mais la sollicitude pour les besoins de la famille, sollicitude qui s'étend bien au delà de l'individu, est le plus puissant stimulant providentiel pour un travail continu et prolongé. La transmission garantie du produit, après la mort du travailleur, constitue le droit de succession et la base fondamentale du contrat social (*) ; car la société civilisée n'est pas une agrégation d'individus, une bande, mais une connexion de familles, une nation. *L'unité sociale,* c'est la famille ; unité, qu'un même signe vocal, que le même nom sert à désigner et à dénommer, et qui établit entre les individus une solidarité morale ; détruisez cette unité, les nations deviennent des troupeaux sans nom.

VI. Un *capital* est la représentation légale du salaire d'un travail *quelconque* exécuté dans un temps passé, et aussi la représentation du payement d'un travail *quelconque* à opérer dans un temps à venir. Une distribution trop uniforme de capitaux entre toutes les familles détruirait toute émulation, rendrait impossible l'exécution des travaux pénibles ou rebutants, entraverait le progrès des beaux-arts, amènerait un retour à la barbarie. Une trop grande inégalité dans cette distribution devient une source de vices, de misères et d'avi-

---

(*) L'abolition du droit d'héritage est la proposition la plus anti-sociale de ceux qui se nomment *socialistes* par antiphrase.

lissements de tout genre. Les institutions sociales doivent combattre ces deux extrêmes. En laissant une liberté complète à la concurrence et aux entreprises de l'esprit industriel, on évite le premier extrême ; alors les capitaux se portent à l'endroit de la plus grande intelligence, de la plus grande activité, de la plus grande économie : ce qui doit être. Pour empêcher un excès d'accumulation, il faut proscrire les majorats, les substitutions, prescrire le partage égal des successions, et faire de *gros* prélèvements sur les *gros* capitaux au bénéfice de la masse commune, du trésor public, destiné à l'exécution des travaux d'un intérêt national. Quel rapport établir entre le prélèvement et le capital ? Jusqu'ici on a toujours admis le rapport commercial, le rapport géométrique ; mais l'accroissement des grands capitaux s'opérant plus facilement que celui des petits (§ III), il semble qu'il n'est plus équitable d'admettre dans les prélèvements la simple proportionnalité commerciale. Appliquant ces considérations aux successions, M. Lamé est d'avis de laisser subsister le rapport géométrique pour les *petits* capitaux et d'imposer les grands capitaux en raison directe de la facilité à les acquérir, et voici comment il procède : Soient A la limite des petits capitaux et c le prélèvement pour cent ; ainsi une succession égale ou inférieure à A paye $\frac{cA}{100}$; soit maintenant une succession iA, i étant un nombre entier, on partage cette somme en i parts égales : la première part A paye $\frac{cA}{100}$, la facilité à acquérir cette part étant représentée par 1, celle d'acquérir la seconde part est représentée par $\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$; ainsi cette deuxième part paye $\frac{cA}{100}\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$, et par le même raisonne-

ment, la troisième part paye $\frac{cA}{100}\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}$; donc toute la succession devra payer :

$$\frac{cA}{100}\left(1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}+\ldots\frac{\log 2}{\log\frac{i+1}{i}}\right),$$

mais l'on a à peu près :

$$\frac{1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\ldots\frac{\log 2}{\log\frac{i+1}{i}}}{i}=1+0{,}35(i-1); \qquad (a)$$

donc le prélèvement à faire est $\frac{icA}{100}[1+0{,}35(i-1)]$.

M. Lamé prend A égal à cinquante mille francs, et c égal à 1 ; il admet que l'activité de l'homme ne pouvant guère s'exercer que pendant une vingtaine d'années, il faut adopter 20 pour la limite de i, ce qui donne 8 0/0 pour un héritage d'un million, et le même rapport est à conserver pour des héritages plus considérables. Le mémoire se termine ainsi : « Si l'on adoptait cette échelle des droits d'enregistrement pour les héritages en ligne directe, il faudrait sans doute la doubler pour les héritages collatéraux, et les quadrupler si les héritiers étaient étrangers à la famille du donataire. »

VII. On a :

$$\log\frac{i+1}{i}=2M\left[\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2i+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2i+1}\right)^5+\text{etc.}\right],$$

où M représente le module. Calculant log 2 avec trois termes, log 4 et log 5 avec deux termes, et les logarithmes suivants avec un terme de la série, on trouve :

$$\log 2 = 2M.\,0{,}34645;\ \frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}=1{,}70951;\ \frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}=2{,}40942;$$

$$\log\frac{5}{4}=\frac{2M}{9};\ \log\frac{6}{5}=\frac{2M}{11};\ \log\frac{7}{6}=\frac{2M}{13};\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, dans le premier membre de la formule (a), il devient

$$\frac{1}{i}[5{,}11893 + 0{,}34645\,(9 + 11 + 13 + \ldots .2i + 1)]$$

$$= 0{,}34645\,(i + 2) - \frac{0{,}07782}{i}$$

$$= 1 + 0{,}34645\,(i - 1) + 0{,}03935 - \frac{0{,}07782}{i}$$

$$= 1 + 0{,}35\,(i - 1) - 0{,}00355\,(i - 1) + 0{,}03935 - \frac{0{,}07782}{i}$$

$$= 1 + 0{,}35\,(i - 1) + 0{,}0429 - \left(0{,}00355 i + \frac{0{,}07782}{i}\right),$$

Nous devons à l'obligeance de M. Koralek (Philippe) cette première *vérification* de la formule de M. Lamé. Nous rappelons à cette occasion que ce professeur étranger est auteur d'une méthode pour calculer les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques avec une extrême promptitude (*voir* t. VI, p. 475). Il y a plus d'une année que l'auteur a présenté son travail à l'Académie, sans pouvoir obtenir un bout de rapport. Lorsqu'on voit qu'on fait à cette docte assemblée des rapports sur le moyen d'abréger la soustraction des fractions en arithmétique, et sur d'autres propositions de même importance, on a lieu d'être *grandement* surpris qu'on ne veuille pas dire un mot sur un procédé qui fait obtenir des logarithmes de nombres entiers et des lignes trigonométriques avec 7 décimales exactes en quelques minutes. J'en ai fait plusieurs essais qui ont réussi ; le silence du rapporteur désigné est d'autant moins explicable qu'il est connu pour son extrême habileté dans les calculs numériques ; qualité pré-

---

(*) La souscription à la traduction d'un ouvrage par M. Koralek, annoncée (t. VI, p. 475), est toujours ouverte chez M. Bachelier, libraire à Paris, et chez l'auteur, 59, rue du Faubourg-Poissonnière. Sa méthode logarithmique est jointe à cet ouvrage.

cieuse et des plus rares que l'illustre géomètre a encore en commun avec Euler le Grand. Il serait pénible d'admettre pour cette explication des motifs étrangers à la science.

Depuis que ceci est écrit, un de nos analystes, le plus versé dans la doctrine des suites, a pris la série de M. Lamé pour sujet de ses savantes investigations (*Comptes rendus*, août 1848, p. 99). M. J. Binet, cherchant la sommation de la série dont le terme général est $\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, et rejetant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^3}$, parvient à cette expression :

$$1+0,35(i-1)+0,04315-0,00343i, \text{ etc.}$$

NOTE

Sur le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des surfaces équivalentes (*V.* t. I, p. 192 et t. V, p. 42).

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur au lycée de Saint-Omer.

—

En nommant R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un polygone régulier donné en surface, et R', r' ceux qui correspondent à un polygone régulier aussi équivalent au premier, mais dont le nombre des côtés est double, on a (Legendre, liv. IV, th. XVI) :

$$R'=\sqrt{rR}, \quad r'=\sqrt{r\frac{R+r}{2}}.$$

Si on applique ces formules au calcul des mêmes lignes relatives à des polygones réguliers de même surface dont les

nombres de côtés s'accroissent toujours en doublant, après n opérations on arrivera à deux rayons R_n, r_n dont la différence pourra être aussi petite qu'on voudra.

En effet $R''-r''=\frac{r}{2}(R-r)$; d'où $R'-r'=\frac{r}{2(R'+r')}(R-r)$, mais $r'>r$ et $R'>r'$, donc $R'-r'<\frac{1}{4}(R-r)$: si R'' et r'' se rapportent à un nouveau polygone de même surface ayant encore deux fois plus de côtés, on aura semblablement $R''-r''<\frac{1}{4}(R'-r')$ et *à fortiori* $R''-r''<\frac{1}{4^2}(R-r)$; et enfin pour le polygone qui aura 2^n fois plus de côtés que le premier, $R_n-r_n<\frac{1}{4^n}(R-r)$. On pourra donc prendre n assez grand pour que R_n-r_n soit plus petit que toute quantité donnée.

Représentons par ρ le rayon du cercle équivalent à chacun des polygones considérés, alors $R_n>\rho>r_n$; donc la limite de R_n et de r_n est ρ.

Pour calculer ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$ il suffira de trouver pour R_n-r_n une valeur moindre que $\frac{2}{10^m}$, car alors $R_n-\frac{R_n+r_n}{2}$ sera inférieur à $\frac{1}{10^m}$ de même que $\frac{R_n+r_n}{2}-r_n$, et par suite $\frac{R_n+r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$.

On aura $R_n-r_n<\frac{2}{10^m}$, si on pose $\frac{1}{4^n}(R-r)<\frac{2}{10^m}$. Soit 4 la valeur commune du cercle et des polygones, et R,r, relatifs au carré; alors $r=1$, $R=\sqrt{2}$; et en posant $\frac{1}{4^n}(\sqrt{2}-1)\overline{\overline{<}}\frac{2}{10^m}$ on a, en employant les log. ordinaires, $m+L(\sqrt{2}-1)\overline{\overline{<}}(1+2n)L2$; relation qui aura lieu *à for-*

tiori en prenant $m \leqq (1+2n)L2$ ou $n \geqq \frac{m}{2L2} - \frac{1}{2}$. Mais $L2 = 0{,}30103$, et $2L2$ vaut $\frac{3}{5}$ à peu près; donc en prenant $n \geqq \frac{5}{3}m - \frac{1}{2}$, $\frac{R_n + r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$, et le dernier polygone à considérer aura 4×2^n côtés.

Comme cette valeur de ρ est comprise entre 1 et 2, ρ^2 sera exprimé avec m chiffres décimaux exacts, et en divisant 4 par cette quantité on obtiendra π avec m chiffres décimaux exacts.

Cette méthode sera un peu moins avantageuse que celle des isopérimètres (t. V, p. 42).

QUESTIONS.

191. Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $x^n(x-1)^n=0$, et démontrer que cette dérivée a n racines comprises entre 0 et 1.

(Gauss.)

192. Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété, que la somme des distances de chacun de ses points aux deux côtés d'un angle droit est constante.

193. La question précédente pour les trois côtés d'un angle trièdre trirectangle.

194. Connaissant en grandeur et en direction les perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés d'un polygone plan, trouver l'aire du polygone en fonction des données.

195. Trois cercles étant donnés dans un même plan; construisant un cercle coupant rectangulairement l'un des cercles donnés et passant par les intersections des deux autres; les trois nouveaux cercles passent par les deux mêmes points. (Plücker.)

LETTRE A M. TERQUEM SUR LES ROSETTES.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Monsieur, dans les observations, si bienveillantes d'ailleurs pour moi, dont vous avez fait suivre la note de M. Brassine sur les rosettes (p. 211), vous attribuez à Waring l'honneur d'en avoir donné la théorie. Je crois, permettez-moi de le dire, que c'est aller beaucoup trop loin. Waring a bien indiqué, dans le problème XV de son ouvrage intitulé *Curvarum algebraicarum proprietates* (2ᵉ édition, 1772, p. 56), le moyen d'obtenir l'équation qui a pour racines les segments interceptés sur les rayons d'une rosette, par une courbe algébrique. Mais il faut remarquer d'abord que cet auteur ne fait qu'indiquer les calculs à effectuer, et ensuite n'énonce aucune de ces propositions où l'on voit les segments former des fonctions qui conservent une valeur constante pendant que la rosette tourne, la courbe étant fixe. Or c'est là ce qui constitue, à proprement parler, la théorie des rosettes dans ce qu'elle a de plus intéressant. Peut-on croire, s'il avait connu ces théorèmes, qu'il les eût passés sous silence ?

Le procédé de Waring consiste à substituer dans l'équation en x, y de la courbe, pour x et pour y, les expressions $x=\rho\cos\frac{\alpha}{m}$, $y=\rho\sin\frac{\alpha}{m}$, $2m$ étant le nombre des rayons et ρ le segment; il élimine l'angle $\frac{\alpha}{m}$ au moyen de la relation

$$\cos\frac{\alpha}{m}=\frac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha+\sqrt{-1}.\sin\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha-\sqrt{-1}.\sin\alpha};$$

et par suite les coefficients de l'équation obtenue, après qu'on a fait disparaître les quantités irrationnelles, sont des fonctions rationnelles, mais généralement fractionnaires, de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. On aperçoit sans peine que l'équation ainsi formée, $\rho^p + A_1\rho^{p-1} + A_2\rho^{p-2} + \ldots = 0$, n'est pas identique avec celle dont on a besoin pour établir la théorie des rosettes. Par exemple, pour $m = 1$, la courbe étant du second degré, soient ρ'_1, ρ'_2 les segments interceptés sur le premier rayon, et ρ_1'', ρ_2'' ceux du deuxième rayon. On a

$$A_1 = \rho_1'\rho_2' + \rho_1'\rho_1'' + \rho_1'\rho_2'' + \rho_2'\rho_1'' + \rho_2'\rho_2'' + \rho_1''\rho_2''.$$

Comment isoler la fonction $\frac{1}{\rho_1'\rho_2'} + \frac{1}{\rho_1''\rho_2''}$ pour démontrer qu'elle conserve une valeur constante? Vous voyez qu'on est conduit à des coefficients dont la composition ne permet pas toujours d'établir les théorèmes les plus simples.

En faisant, au contraire, $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$, dans l'équation du degré n,

$$u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

où u_i est une fonction homogène et entière de x, y du degré i, on trouve :

$$v_n\rho^n + v_{n-1}\rho^{n-1} + v_{n-2}\rho^{n-2} + \ldots + v_2\rho^2 + v_1\rho + u_0 = 0;$$

v_i étant homogène et du degré i en $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Donc en posant $\rho = \frac{1}{r}$, l'équation

$$r^n + \frac{v_1}{u_0}r^{n-1} + \frac{v_2}{u_0}r^{n-2} + \ldots + \frac{v_{n-2}}{u_0}r^2 + \frac{v_{n-1}}{u_0}r + \frac{v_n}{u_0} = 0,$$

qui a pour racines les puissances — 1 de ρ, a pour coefficient de r^i une fonction entière, homogène, du degré i, de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; et par suite toute fonction symétrique du degré i de ces puissances s'exprime aussi par une fraction entière du degré i, de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Or, si l'on fait la somme des valeurs d'une telle fonction pour la série des $2m$ angles,

$$\alpha, \quad \alpha+\frac{2\pi}{2m}, \quad \alpha+2.\frac{2\pi}{2m} \ldots . \alpha+(2m-1)\frac{2\pi}{2m},$$

on obtient une quantité indépendante de α, toutes les fois que m est plus grand que i. Cet énoncé renferme toute la théorie des rosettes *circulaires*.

Considérons présentement dans l'espace une surface quelconque et un groupe ou faisceau de rayons menés d'un point fixe aux sommets d'un polygone régulier elliptique (inscrit dans une ellipse, de manière que ses côtés correspondent à des secteurs équivalents), je dis que la même propriété aura lieu, pourvu que l'on ait soin de multiplier chaque puissance -1 de ρ par la longueur du rayon correspondant. Soit R cette longueur, prenons pour origine des coordonnées le point fixe, et supposons les axes des x et des y parallèles à ceux de la courbe. Les équations de celle-ci peuvent être mises sous la forme $x=A+a\cos\omega$, $y=B+b\sin\omega$, $z=C$, a, b, A, B, C étant des constantes, et ω une variable auxiliaire telle que pour la série

$$\omega, \quad \omega+\frac{2\pi}{m}, \quad \omega+2\frac{2\pi}{m} \ldots . \omega+(m-1)\frac{2\pi}{m},$$

on a les sommets d'un polygone régulier elliptique de m côtés. Soit encore alors

$$u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots.+u_2+u_1+u_0=0\,;$$

l'équation de la surface u_i étant comme ci-dessus du degré i, mais en x, y, z. Les coordonnées d'un point quelconque de cette surface sont évidemment $\frac{\rho}{R}$ A$+a\cos\omega$), $\frac{\rho}{R}(B+b\sin\omega)$, $\frac{\rho}{R}$C. Donc, en les substituant dans l'équation ci-dessus, on a une transformée où le coefficient de $\left(\frac{\rho}{R}\right)^i$ est *au*

plus du degré i en $\sin\omega$, $\cos\omega$; donc, etc. Cette conclusion, bien plus générale que la précédente, renferme ce qu'on pourrait appeler la théorie des rosettes coniques.

Voici un théorème assez curieux qu'on en déduit : *Soit un polyèdre régulier ellipsoïdal* (c'est-à-dire qui devient régulier quand l'ellipsoïde devient une sphère) ; *si l'on suppose des droites menées du centre de l'ellipsoïde aux sommets de ce polyèdre, et prolongées jusqu'à une surface quelconque, les sommes des valeurs inverses des segments, de leurs carrés et de leurs produits deux à deux dans chaque direction sont constantes pour les polyèdres de même espèce circonscrits au même ellipsoïde.*

Pour le dodécaèdre et l'icosaèdre on peut s'élever jusqu'à la quatrième puissance.

Il est bien évident qu'on obtiendrait des résultats analogues en faisant passer les rayons du faisceau par les points que déterminent les équations

$x = \varphi(\sin\omega, \cos\omega)$, $y = \psi(\sin\omega, \cos\omega)$, $z = \varpi(\sin\omega, \cos\omega)$;

φ, ψ, ϖ étant les signes de trois fonctions entières, lorsqu'on donne à l'argument les valeurs

$$\omega,\quad \omega + \frac{2\pi}{m},\quad \omega + 2 \cdot \frac{2\pi}{m} \ldots\ldots \omega + (m-1)\frac{2\pi}{m},$$

m étant plus grand que le degré de la fonction que l'on considère. Toute la difficulté est de définir géométriquement ces nouveaux systèmes ; j'en donnerai quelques exemples dans une prochaine lettre.

THÉORIE GÉNÉRALE DES POLES, POLAIRES, etc.

(V. p. 325, fin.)

PAR M. LENTHÉRIC NEVEU,
Professeur.

—

§ II.

1. Soit

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Byz+B'xz+B''xy+Cx+C'y+C''z+E=0$$

Ou plus simplement $F(x,y,z)=0$ (1), l'équation générale des surfaces du 2e ordre.

On sait que lorsqu'on mène à la surface un plan tangent par un point quelconque $\alpha.\beta.\gamma$ de l'espace, les coordonnées du point de contact satisfont aux deux équations

$$F(x.y.z)=0;\ F'_x(\alpha-x)+F'_y(\beta-y)+F'_z(\gamma-z)=0$$

La seconde ajoutée au double de la première s'abaisse au premier degré et devient

$$\alpha F'_x+\beta F'_y+\gamma F'_z+Cx+C'y+C''z+2E=0 \qquad (2)$$

équation d'un plan ; donc tous les points de contact sont dans ce plan. Ainsi, *une surface conique circonscrite à une surface du* deuxième *ordre touche cette surface suivant une courbe plane.*

Nous désignerons le plan de cette courbe sous le nom de *plan de contact.* Cela posé, si le sommet $\alpha.\ \beta.\ \gamma$ de la surface conique circonscrite se meut sur un plan quelconque

$$z=px+qy+r\ (3)$$

on aura entre α. β. γ la relation $\gamma = p\alpha + q\beta + r$ et par suite l'équation (2) deviendra

$$(F'_x + pF'_z)\alpha + (F'_y + qF'_z)\beta + rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \quad (4)$$

et sera l'équation générale de tous les plans de contact qui correspondent aux divers points du plan (3).

Or, la forme seule de l'équation (4) montre que tous les plans qu'elle représente en y faisant varier α. β coupent la droite fixe

$$F'_x + pF'_z = 0 ; \quad F'_y + qF'_z = 0$$

en un même point donné par l'intersection des trois plans

$$F'_x + pF'_z = 0 \ (5) ; \quad F'_y + qF'_z = 0 \qquad (6)$$
$$rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \qquad (7)$$

dont les équations ne contiennent pas les variables α. β; donc tous les plans de contact se coupent en un même point situé sur la droite (5), (6). Cette droite est évidemment un diamètre de la surface, car les équations sont satisfaites par $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$ qui déterminent les coordonnées du centre. La position de ce diamètre est aussi indiquée par la forme des équations (5), (6).

En effet l'équation d'un plan tangent à la surface et parallèle au plan (3) est $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$ x'. y'. z' désignant les coordonnées du point de contact, et l'on doit avoir $p = -\frac{F'_{x'}}{F'_{z'}}$ ou $F'_{x'} + pF'_{z'} = 0$ et $q = -\frac{F'_{y'}}{F'_{z'}}$ ou $F'_{y'} + qF'_{z'} = 0$, équations qui sont satisfaites si le point de contact x'. y'. z' est une des extrémités du diamètre (5), (6). Donc ce diamètre est celui qui passe par le point de contact d'un plan tangent à la surface parallèlement au plan donné. Nous pouvons par conséquent en conclure ce théorème :

Si l'on circonscrit à une surface du deuxième ordre une suite de surfaces coniques dont les sommets sont situés sur un même plan : 1° toutes les courbes de contact seront des courbes planes ; 2° leurs plans se couperont en un même point ; 3° ce point sera situé sur le diamètre de la surface qui passe par le point de contact d'un plan tangent à la surface et parallèle au plan donné.

Le point de concours de tous les plans de contact qui correspondent aux divers points d'un plan, a été appelé par M. Gergonne le *pôle* du plan, et l'on voit qu'à un plan quelconque correspond toujours un pôle dont les équations (5), (6), (7) déterminent les coordonnées en y remplaçant p, q, r, par les constantes de ce plan.

2. Réciproquement, soient a,b,c les coordonnées d'un point de l'espace, en faisant $x=a$, $y=b$, $z=c$ dans les équations (5), (6), (7), elles donneront $p=-\frac{F'_a}{F'_c}$; $q=-\frac{F'_b}{F'_c}$, $r=-\frac{Ca+C'b+C''c+2E}{F'_c}$, en substituant dans (3) l'équation résultante

$$F'_ax+F'_by+F'_cz+Ca+C'b+C''c+2E=0 \qquad (8)$$

sera celle d'un plan ayant pour pôle le point a,b,c ; d'où résulte ce nouveau théorème :

Si par un point quelconque, on conduit une suite de plans qui coupent une surface du deuxième ordre et que l'on considère les courbes d'intersection comme les lignes de contact d'une suite de surfaces coniques, circonscrites à la surface du deuxième ordre, les sommets de toutes ces surfaces seront dans un même plan, et ce plan sera parallèle à celui qui touche la surface à l'extrémité du diamètre qui passe par le point.

Ce plan est dit le plan *polaire* du point. Ainsi, à un point quelconque de l'espace correspond toujours un plan polaire

dont on trouve l'équation en remplaçant dans (8) a, b, c par les coordonnées de ce point.

3. Le plan polaire étant $z = px + qy + r$ (3), nous avons vu que son pôle est déterminé par les trois équations :

$$F'_x + pF'_z = 0 \ (5) ; \quad F'_y + qF'_z = 0 \qquad (6)$$
$$rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0. \qquad (7)$$

Comme chacune d'elles ne contient que l'une des constantes p, q, r du plan, il en résulte que séparément ou deux à deux ces équations expriment un lieu géométrique des pôles, qui dans le premier cas est un plan et dans le deuxième cas une droite.

r *étant seule constante*, le lieu géométrique des pôles sera le plan (7); or dans cette hypothèse le plan (3) passe constamment par le point fixe $x=0, y=0, z=r$ et l'équation (8) montre que l'équation (7) est celle du plan polaire de ce point fixe; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans qui se coupent au même point est le plan polaire de ce point.

r *étant seule variable*, le lieu géométrique des pôles est la droite (5), (6). Or, dans cette hypothèse le plan (3) se meut parallèlement à lui-même, et nous avons vu que la droite (5), (6) est le diamètre qui passe par le point de contact d'un plan tangent parallèle au plan donné ; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans parallèles est le diamètre passant sur le point de contact du plan tangent parallèle.

p *étant seule constante*, le lieu géométrique des pôles sera le plan (5) ; or, dans cette hypothèse, le plan (3) est parallèle à la droite fixe $y=0$; $z=px$, et le plan diamétral conjugué de cette droite est $\frac{1}{p}F'_x + F_z = 0$ ou $F'_x + pF'_z = 0$, qui est l'équation (5) ; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans parallèles à une droite, est le plan diamétral conjugué de la direction.

p *étant seule variable*, le lieu géométrique des pôles sera la droite (6), (7). Or, dans cette hypothèse, le plan (3) passe constamment par la droite $x = 0$, $z = qy + r$ et (6) est le plan diamétral conjugué de la direction : donc la droite (6), (7) est située dans ce plan diamétral et il reste à déterminer sa position dans ce plan.

Comme elle est indépendante du choix des axes, nous pouvons supposer que celui de y est parallèle à la droite $x = 0$; $z = qy + r$, ce qui donne $q = 0$, et prendre le plan diamétral conjugué de la direction pour celui des xz, ce qui réduit l'équation de la surface à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + B'xz + Cx + C''z + E = 0;$$

alors la droite, lieu géométrique des pôles, aura pour équations

$$y = 0, \quad rF'_z + Cx + C''z + 2E = 0.$$

La trace de la surface sur le plan des xz est une conique ayant pour équations

$$y = 0; \quad Ax^2 + A''z^2 + B'xz + Cx + C''z + E = 0.$$

La trace de la droite donnée sur le même plan est $x = 0$; $y = 0$; $z = r$; or la polaire de ce point par rapport à la courbe qui précède a pour équations

$$y = 0; \quad rF'_z + Cx + C''z + 2E = 0$$

qui sont précisément celles de la droite, lieu géométrique des pôles ; donc, *le lieu géométrique des pôles d'un système de plans qui se coupent suivant la même droite, est la polaire du point où la droite rencontre le plan diamétral conjugué de la direction*, la polaire *étant prise par rapport à la conique que le plan diamétral détermine sur la surface.* Nous verrons dans le § suivant que cette polaire est la droite suivant laquelle se couperaient tous les plans de contact, si le point

α, β, γ se déplaçait suivant la droite qui est l'intersection commune des plans, et nous pourrons alors énoncer plus simplement le théorème qui précède.

La considération de la constante q conduirait évidemment aux mêmes conclusions que celle de la constante p, et chacun des théorèmes qui précèdent aurait la réciproque dont il est facile de trouver l'énoncé.

4. Cherchons maintenant la position relative du pôle et du plan polaire. Comme elle est indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels que celui de z soit le diamètre passant par le pôle, et que le plan de xy soit tangent à la surface parallèlement au plan polaire. L'équation de la surface se réduira à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + C''z = 0;$$

l'ordonnée verticale du centre sera donnée par l'équation dérivée en z

$$2A''z + C'' = 0; \text{ d'où } z = -\frac{C''}{2A''}.$$

Cette ordonnée sera la longueur du demi-diamètre qui passe par le pôle; en la représentant par d on aura donc

$$d = -\frac{C''}{2A''}.$$

L'équation (b) du plan polaire deviendra

$$(2A''c + C'')z + C''c = 0; \text{ d'où } z = -\frac{C''c}{2A''c + C''},$$

z désignant la distance du plan polaire à l'origine. En appelant p la distance du plan polaire au centre, on aura donc

$$p = -\frac{C''c}{2A''c + C''} + \frac{C''}{2A''}, \text{ ou réduisant : } p = \frac{C''^2}{2A''(2A''c + C'')}.$$

La distance du pôle à l'origine étant c, en appelant p' la distance du pôle au centre, on aura

$$p' = c + \frac{C''}{2A''} \text{ ou } p' = \frac{2A''c + C''}{2A''}.$$

Et enfin, faisant le produit des deux distances p, p', on arrivera à la relation remarquable

$$p \times p' = d^2; \qquad (9)$$

donc,

Dans les surfaces de deuxième ordre qui ont un centre, le pôle d'un plan est situé de manière que si l'on mène le diamètre qui passe par le pôle, le demi-diamètre est moyen proportionnel entre les distances du pôle et du plan au centre, les distances étant mesurées sur le diamètre.

Si la surface n'a pas de centre, on a de plus $A''=0$ et l'équation du plan polaire se réduit à $z=-c$, d'où résulte cette propriété du paraboloïde, analogue à celle de la parabole :

Dans tout paraboloïde, la partie du diamètre comprise entre un plan et son pôle a son milieu sur la surface.

Cette propriété et la relation (9) donnent un procédé très-simple pour construire, soit le plan polaire lorsque l'on connaît le pôle, soit le pôle lorsque l'on connaît le plan polaire pour chacune des cinq surfaces du deuxième ordre.

Dans le cas de la sphère, le diamètre est perpendiculaire au plan polaire, et la relation (9) a toujours lieu.

De ce qui précède résultent ces conséquences, qu'il suffira d'énoncer :

Le plan polaire étant extérieur à la surface, le pôle est intérieur et réciproquement.

Le plan s'éloignant du centre, le pôle s'en rapproche et réciproquement.

Le plan passant par le centre, le pôle est à l'infini et réciproquement.

Le plan étant tangent, le pôle est au point de contact, et réciproquement *si le pôle est sur la surface, le plan est tangent en ce point.*

5. L'équation (8) du plan polaire en y remplaçant F'_a, F'_b, F'_c par leurs valeurs et ordonnant par rapport à *a*, *b*, *c* devient

$$aF'_x + bF'_y + cF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0$$

en comparant cette équation avec (2) on voit que *le plan polaire d'un point est le plan de la courbe de contact qui correspond à ce point*; donc, *le pôle d'un plan est l'intersection commune des plans polaires de tous les points de ce plan*. Par conséquent, *si un point est dans un plan, son plan polaire passera par le pôle de ce plan.*

Réciproquement *le plan polaire d'un point est le lieu géométrique des pôles de tous les plans qui passent par ce point*; donc, *si un point passe par le pôle d'un autre plan, son pôle se trouvera sur cet autre plan* (3).

6. L'identité de l'équation du plan polaire d'un point avec celle du plan de contact qui correspond à ce point nous indique que le plan polaire est un lieu géométrique dont le plan de contact n'est qu'un cas particulier.

En effet, soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cx + C'y + C''z + E = 0$, l'équation générale des surfaces du deuxième ordre. Désignons par α, α' les segments compris sur l'axe des x entre l'origine et la surface. Ces segments sont donnés par l'équation du deuxième degré

$$Ax^2 + Cx + E = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \alpha' = -\frac{C}{A}; \quad \alpha\alpha' = \frac{E}{A};$$

de même β, β' désignant les segments compris sur l'axe des y, ces segments seront donnés par l'équation du deuxième degré

$$A'y^2 + C'y + E = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta + \beta' = -\frac{C'}{A'}; \quad \beta\beta' = \frac{E}{A'}.$$

Enfin, γ, γ' désignant les segments sur l'axe des z, ces segments sont donnés par l'équation

$$A''z^2+C''z+E=0,\quad \text{d'où}\quad \gamma+\gamma'=-\frac{A''}{C''},\ \gamma\gamma'=\frac{E}{A''}.$$

Prenons un segment sur chacun des axes, par exemple α sur l'axe des x, β sur celui des y, et γ sur celui des z. Le plan que déterminent ces trois segments a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

Le plan qui détermine les trois autres segments α', β', γ' aurait de même pour équation

$$\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}+\frac{z}{\gamma'}=1.$$

Ces deux plans se coupent suivant la même droite avec un troisième plan qui a pour équation la somme de leurs équations, c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}x+\frac{\beta+\beta'}{\beta\beta'}y+\frac{\gamma+\gamma'}{\gamma\gamma'}z=2.$$

Or, en substituant en place de $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, leurs valeurs de ci-dessus, l'équation de ce troisième plan devient

$$Cx+C'y+C''z+2E=0,$$

et l'équation (8) fait voir que ce deuxième plan est le plan polaire de l'origine ; donc la position est indépendante de la direction des axes, et il en résulte ce théorème :

Si par un point fixe, on mène trois sécantes rencontrant une surface du deuxième ordre chacune en deux points, et si l'on prend un point d'intersection sur chaque sécante, le plan déterminé par ces trois points sera coupé par celui des autres points restants, suivant une droite qui sera toujours située dans un même plan lorsque l'on fera tourner les sécantes autour du point fixe, et ce plan sera le plan polaire du point fixe.

Donc, si parmi les sécantes trois peuvent devenir tangentes, les points de contact seront sur le plan polaire et en détermineront la position, ce qui explique l'identité de l'équation de ce plan avec celle du plan de contact.

On pourrait conclure de ce théorème un nouveau procédé pour construire, soit le plan polaire d'un point donné, soit le pôle d'un plan donné.

§ III.

1. Reprenons l'équation.

$$\alpha F'_x+\beta F'_y+\gamma F'_z+Cx+C'y+C''z+2E=0 \qquad (2)$$

de la courbe de contact qui correspond à un point quelconque α, β, γ de l'espace, et examinons le cas où le point α, β, γ est sur une droite quelconque

$$x=mz+g \quad (10) \quad y=nz+h. \qquad (11)$$

On aura alors entre α, β, γ les deux relations

$$\alpha=m\gamma+g, \quad \beta=n\gamma+h,$$

et substituant ces valeurs de α, β dans (2), l'équation résultante

$$(mF'_x+nF'_y+F'_x)\gamma+gF'_m+hF'_x+Cx+C'y+C''_y+2E=0 \quad (12)$$

sera l'équation générale de tous les plans de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (10), (11).

Or la forme de l'équation (12) fait voir que tous les plans qu'elle représente se coupent suivant une même droite, car l'intersection de deux quelconques de ces plans serait celle des deux plans

$$mF'_x+nF'_y+F'_z=0 \qquad (13)$$

$$gF'_x+hF'_y+Cx+C'y+C''z+2E=0 \qquad (14)$$

dont les équations sont indépendantes de la variable γ.

On sait que le plan conjugué de la direction

$$x=mz; \quad y=nz$$

qui est celle de la droite donnée (10), (11), est

$$mF'_x + nF'_y + F'_z = 0$$

équation du plan (13), donc la droite (13), (14) est dans ce plan, et il en résulte ce théorème.

Si l'on circonscrit à une surface du deuxième ordre une suite de surfaces coniques dont les sommets soient situés sur une même droite, les plans de toutes les courbes de contact se couperont suivant une autre droite qui sera située dans le plan diamétral conjugué de la direction de la première.

La droite (13), (14) a été appelée par M. Gergonne la *polaire* de la droite (10), (11). A une droite de l'espace correspond toujours une polaire dont on trouverait les équations en substituant dans (13), (14), en place de m, n, g, h, les constantes de cette droite.

2. Réciproquement, supposons que le point α, β, γ se meuve sur la droite (13), (14), ce qui donnera entre α, β, γ les relations

$$mF'_\alpha + nF'_\beta + F'_\gamma = 0 \quad gF'_\alpha + hF'_\beta + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + 2E = 0.$$

L'équation générale des plans des diverses courbes de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (13), (14), sera l'équation (2) que l'on peut mettre sous la forme

$$F'_\alpha x + F'_\beta y + F'_\gamma z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + 2E = 0 \qquad (2)$$

en y supposant α, β, γ liées entre elles par les deux relations qui précèdent. Or ces relations sont précisément celles qui expriment que le plan (2) contient la droite

$$x = mz + g \ (10) \quad y = nz + h \qquad (11)$$

donc, de même que tous les plans de contact qui correspondent aux divers points de la droite (10), (11) se coupent suivant la droite (13), (14), réciproquement tous les plans de contact qui correspondent aux divers points de la droite (13), (14) se coupent suivant la droite (10), (11), ce qui justifie la

dénomination de *polaires conjuguées* donnée par M. Gergonne à ces deux droites.

3. La polaire conjuguée de la droite

$$x = mz + g \ (10) \quad y = nz + h \qquad (11)$$

a pour équation

$$mF'_x + nF'_y + F'_z = 0 \ (13); \quad gF'_x + hF'_y + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \ (14);$$

l'équation (13), ne contenant que les coefficients angulaires m, n de la droite (10) (11), est le lieu géométrique des positions de cette droite lorsque m et n restant constants on y fait varier g et h; mais alors la droite (10), (11) se meut parallèlement à elle-même, et (13) est le plan diamétral conjugué de la direction constante; donc

Les polaires d'un système de droites parallèles sont toutes situées dans le plan diamétral conjugué de leur direction commune, et nous pouvons en conclure que réciproquement :

Les polaires de toutes les droites situées dans un plan diamétral sont parallèles à la direction dont ce plan serait le conjugué.

L'équation (14) ne contient que les constantes g et h de la droite (10)(11), donc elle est le lieu de position de cette droite lorsque g et h restant constants, on y fait varier m et n. Mais alors la droite (10), (11) passe par le point fixe $x = g$, $y = hz$; $= 0$, et l'équation (14) est le plan polaire de ce point; ainsi

Les polaires d'un système de droites qui se coupent en un même point sont toutes situées dans le plan polaire de ce point, réciproquement, *et les polaires d'un système de droites qui sont situées dans un même plan passent toutes par le pôle de ce plan.*

4. Cherchons la position de la polaire conjuguée (13), (14) dans le plan diamétral (13). Comme cette position est indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels

que celui des z soit parallèle à la droite donnée (10), (11), ce qui exige que l'on ait $m=0$, $n=0$, et prendre pour plan des xy, ce plan diamétral conjugué de sa direction, ce qui réduit l'équation de la surface à la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''r^2+B''xy+Cx+C'y+C''z+E=0.$$

Les équations de la polaire conjuguée (13) (14) sont dans ces hypothèses

$$z=0 \quad gF'x+hF'y+Cx+C'y+zE=0.$$

La trace de la surface sur le plan des xy est une conique

$$z=0, \quad Ax^2+A'y^2+B''xy+C+xC'y+E=0.$$

La trace de la droite donnée sur le même plan est un point

$$x=g, \; y=h, \; z=0$$

Or la polaire de ce point par rapport à la conique est :

$$z=0, \quad gF'x+hF'y+Cx+C'y+zE=0.$$

Donc elle coïncide avec la polaire conjuguée de la droite.

Ainsi : *La polaire conjuguée d'une droite de l'espace est la polaire du point où la droite rencontre le plan diamétral conjugué à sa direction, la polaire étant prise par rapport à la section que le plan diamétral détermine sur la surface.*

On voit par là que la polaire d'une droite de l'espace se ramène à la polaire d'un point d'un plan par rapport à une conique située dans ce plan.

THÉORÈME DE NEWTON SUR LES ASYMPTOTES.

PAR M. LEBESGUE.

J'ajouterai d'abord un mot à ce que M. Terquem a dit dans les *Nouv. ann.*, t. IV, p. 14, sur les diamètres des courbes algébriques.

Soit $Q_i y^{n-i} + Q_{i+1} y^{n-i-1} + \ldots Q_n = 0$, l'équation d'une courbe algébrique de degré n; Q_i, $Q_{i+1} \ldots Q_n$ sont des fonctions entières de x dont l'une au moins sera d'un degré marqué par l'indice, le degré ne pouvant jamais surpasser cet indice. La ligne des ordonnées moyennes sera donc :

$$(n-i) y Q_i + Q_{i+1} = 0.$$

Ce sera généralement une courbe facile à construire, car elle est du premier degré y et au plus du degré $i+1$ en x; mais si $Q_{i+1} = (ax+b) Q_i$, on a :

$$(n-i) y + ax + b = 0,$$

ligne droite qui prend le nom de diamètre.

Si $i=0$, Q_0 est une constante. $Q_1 = mx+n$, la ligne des ordonnées moyennes, est toujours une ligne droite; c'est le diamètre ordinaire. Si $i>0$, le diamètre sera dit *singulier*. Ces sortes de diamètres, dont Waring a parlé, sont toujours en nombre n ou inférieurs à n.

On voit de plus qu'en prenant un tel diamètre pour axe des x, l'équation prend la forme

$$Q_i y^{n-i} + Q_{i+2} y^{n-i-2} + \ldots = 0.$$

Une équation étant donnée, on voit de suite si la ligne des ordonnées moyennes, ou celle des abscisses moyennes, peut être un diamètre ordinaire ou singulier. Cherchons si, en prenant $y=px$ pour axe d'un nouvel axe des abscisses x', la ligne des abscisses ne serait pas un diamètre ordinaire ou singulier.

Soit $x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \ldots = 0$ (a)

l'équation d'une courbe rapportée à des axes faisant l'angle θ. Si l'axe des y restant le même, l'axe x' a pour équation $y=px$, on transformera l'équation en posant $y=px+y'$, $x' = x\sqrt{1+p^2+2p\cos\theta} = Px$; et comme $\frac{y}{x} = p + \frac{y'}{x}$, en substi-

tuant et ordonnant par rapport à x, puis remplaçant x par $\frac{x'}{P}$ on trouvera :

$$x'^n Fp + Px'^{n-1}(y'F'p + fp) + \ldots = 0 ; \qquad (b)$$

de là on tire un diamètre ordinaire :

$$nx'Fp + P(y'F'p + fp) = 0,$$

ou relativement aux axes primitifs :

$$yF'p + (nFp - pF'p)x + fp = 0.$$

Le diamètre ne pourrait être singulier qu'en faisant disparaître le terme x'^n ou en posant :

$$Fp = Ap^n + A_1 f^{n-1} + \ldots A_n = 0.$$

Si $$P\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}(Ay^n + A_1 y^{n-1}x + \ldots + A_n x^n),$$

d'où l'on parvient facilement à cette conclusion, il y a au plus n diamètres singuliers ; il serait, je crois, superflu de la développer.

De ce que $Fp = 0$, on n'en peut conclure l'existence d'un diamètre singulier correspondant à la droite $y = px$, que si la condition de divisibilité donnée plus haut est satisfaite ; seulement dans tous les cas l'équation (b) montre que les droites d'équation $y = px + y'$ parallèles, mais variables avec y', ne peuvent rencontrer la courbe en plus de $n-1$ points. Par cette raison on peut regarder ces sécantes comme *singulières*, en nommant *ordinaires* celles pour lesquelles on n'a pas $Fp = 0$, auquel cas il peut y avoir n points d'intersection.

Parmi les sécantes singulières données par l'équation $y = px + y'$ sous la condition $Fp = 0$, il faut remarquer celle pour laquelle y' serait déterminé par l'équation

$$y'F'p + fp = 0 ;$$

l'équation (b) montrerait alors que les lignes droites d'équation

$$y=px-\frac{fp}{F'p}\,;\quad (Fp=0) \qquad (c)$$

ne peuvent rencontrer la courbe en plus de $n-2$ points.

Examinons de plus près ces sécantes *singulières*. Quand l'équation (b) est mise sous la forme

$$Q_1x'^{n-1}+Q_2x'^{n-2}+\ldots+Q_n=0, \qquad (d)$$

s'il arrive que la valeur de y' qui donne $Q_1=0$ donne aussi $Q_2=Q_3\ldots=Q_n=0$, l'équation (d) sera décomposable, et la droite (c) sera au nombre des lignes représentées par l'équation donnée. Ce cas étant laissé de côté, si on donne à y' non plus une valeur qui rende $Q_1=0$, mais Q_1 fort petit, l'équation

$$x'^{n-1}+\frac{Q_2}{Q_1}x'^{n-2}+\ldots=0$$

aurait nécessairement des racines fort grandes approchant de plus en plus de l'infini. Deux cas peuvent se présenter (il serait peu utile de donner ici des exemples, chose déjà faite dans ce recueil) : si parmi ces racines infinies il y en a de réelles, la ligne (c) sera dite *asymptote vraie;* mais si ces racines infinies étaient imaginaires, la ligne (c) ne serait plus une asymptote, autrement ce serait une *asymptote fausse*. Newton a donné un théorème général sur les courbes algébriques, et qui s'étend aux asymptotes tant vraies que fausses.

En voici l'énoncé : si une courbe du n^e degré ayant n asymptotes est coupée par une sécante, savoir les asymptotes aux points a_1, $a_2\ldots a_n$, les branches correspondantes de la courbe aux points b_1, $b_2\ldots b_n$, la somme des segments a_1b_1, a_2b_2 ..... a_nb_n sera nulle, c'est-à-dire que la somme des segments positifs étant S, celle des segments négatifs

sera —S. Ainsi pour l'hyperbole conique on a deux segments égaux en valeur absolue.

La démonstration s'établit en quelques mots, au moyen d'un théorème de M. Liouville. Si l'on a pris l'axe des y parallèle à la sécante, les asymptotes seront données par l'équation

$$y=px-\frac{fp}{F'p}$$

en supposant

$$Fp=Ap^{n-1}+A_1p^{n-1}+\ldots+A_n=0.$$
$$fp=Bp^{n-1}+B_1p^{n-2}+\ldots+B_{n-1}.$$

soient $p_1 p_2 \ldots p_n$ les n racines inégales et réelles de l'équation $Fp=0$ (nous laisserons de côté pour abréger le cas des racines égales, quand dans ce cas il y a néammoins n asymptotes, ce qui exige des équations de condition), on aura $p_1+p_2+\ldots+p^n=-\frac{A_1}{A}$.

Soient $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ les n ordonnées aux asymptotes pour une abscisse donnée x, il viendra :

$$Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=(p_1+p_2+\ldots+p_n)x-\left\{\frac{fp^1}{F'p}+\frac{fp_2}{F'p^2}+\ldots+\frac{fp_n}{F'p_n}\right\}$$

ou encore :

$$\Sigma_1^n Y=x\Sigma_1^n p-\Sigma_1^n\frac{fp}{F'p}.$$

Or $\Sigma_1^n p=-\frac{A_1}{A}$, et comme on l'a vu dans ces Annales, t. VI, p. 128, ligne 12^e^,

$$\Sigma_1^n\frac{fp}{F'p}=\frac{B}{A}$$

(en changeant convenablement la notation et corrigeant une faute de copie qui vient de ce que

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{A_1}{A}-\alpha\frac{B}{A}$$

et non $-\frac{A'}{A}-\alpha B$).

On a donc $\Sigma Y = -\frac{A_1 x + B}{A}$.

Or si pour la même abscisse x, les ordonnées à la courbe sont $y_1, y_2 \ldots y_n$, on a $y_1+y_2 \ldots + y_n = \Sigma y = -\frac{A_1 x + B}{A}$, donc

$$\Sigma_1^n Y = \Sigma_1^n y \quad \text{ou} \quad \Sigma_1^n (Y - y) = 0,$$

ce qui est précisément le théorème de Newton.

En voici une conséquence pour le troisième degré. Si deux segments sont nuls, le troisième sera aussi nul, d'où ce théorème.

Quand une courbe du troisième degré rencontre ses trois asymptotes en trois points, ces points sont en ligne droite. S'il n'y a que deux points d'intersection, ils sont sur une parallèle à l'une des asymptotes. Cela suit d'ailleurs de la forme réduite de l'équation des courbes du troisième degré, à trois asymptotes.

SUR UN POSTULATUM DE GÉOMÉTRIE.

PAR E. CATALAN.

Dans le cahier de mars, je vois une note de M. Breton (de Champ), intitulée : *Réduction d'un postulatum de M. Catalan au postulatum d'Euclide*. L'auteur de cette note m'a fait un honneur que je n'ai pas mérité : le postulatum en question, s'il est de quelqu'un, n'est pas de moi. Il est bien vrai que dans la préface de mes *Éléments de géométrie*, j'ai cité ce postulatum comme j'en aurais pu citer d'autres ; mais je n'ai pas songé à en revendiquer *la propriété*. J'ignore si l'on peut, en toute rigueur, réduire ce postulatum à celui d'Euclide, et je regrette que M. Breton,

qui a publié dans votre journal et ailleurs des travaux empreints d'un remarquable esprit d'invention, ait cru utile d'essayer cette réduction.

SUR LE MÊME POSTULATUM;

PAR M. A. BERNARD,
Professeur au lycée de Tours.

—

Je viens de lire une démonstration proposée par M. Breton (de Champ) pour la proposition (A) :

« Deux droites indéfinies étant situées de part et d'autre » dans un même plan, si la première a deux points situés de » côté et d'autre de la seconde, elle rencontre celle-ci. » (*Annales* 1848, page 93.)

Pour le fond, je n'ai rien à ajouter à la note ; quant à la démonstration, elle me semble singulière.

1° M. Breton admet que la médiane du triangle isocèle est perpendiculaire sur la base ; comment le démontre-t-il sans employer la proposition (A) ? Cette dernière aura paru dans quelqu'une des propositions antérieures.

2° M. Breton admet implicitement que si une droite en rencontre une autre d'un côté, elle passe de l'autre côté. En quoi est-ce plus clair que la proposition (A)?

Quelques autres vérités dont se sert M. Breton ne sont pas plus incontestables que la proposition à démontrer.

Parmi les démonstrations qui m'ont toujours paru inutiles, permettez-moi d'en citer une.

A peu près tous les géomètres cherchent à démontrer que par un point d'une droite on peut élever à cette droite une perpendiculaire, et une seule, autrement une droite et une

seule partageant en deux parties égales l'angle total. Aucun ne s'est encore avisé de démontrer que sur une ligne limitée il existait un point, et un seul, partageant cette ligne en deux parties égales. Pourquoi une démonstration pour l'une de ces vérités plutôt que pour l'autre ?

Note. Écoutons Pascal : « Règles pour les démonstrations :
» I. N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui
» sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de
» plus clair pour les prouver. » (Pensées, 1re partie, art. 111.)

Beaucoup de géomètres ont une tendance à s'exercer sur les *notions communes*, car c'est là le vrai nom que les anciens donnaient à ce qu'on appelle *axiomes*. Wolf va même jusqu'à démontrer que le tout est plus grand que sa partie, et à cette occasion d'Alembert dit que lorsqu'on a lu de tels raisonnements, il ne tient plus qu'au lecteur d'en douter.

BIBLIOGRAPHIE.

—

Essai de géométrie analytique de la sphère, par M. A. Borgnet, professeur de mathématiques au collége royal de Tours (12 juin 1847). Tours, in-8° de 39 pages.

Les trois êtres géométriques, le point, la ligne, la surface peuvent être représentés de position et de forme, au moyen d'une infinité de *conventions*, auxquelles on donne le nom de *systèmes de coordonnées*. L'esprit mathématique consiste à choisir le système qui mène le plus aisément, le plus promptement au but, et procure les plus nombreuses conséquences. Le système le plus usité est celui des projections d'un point sur trois droites fixes; le mouvement d'un point dans l'espace étant connu par les mouvements de ces trois projections, ce

système a l'avantage de lier la cynémathique à la géométrie et de n'en faire qu'une seule science ; c'est sur cette identité que Newton a établi, de la manière la plus intuitive et la plus satisfaisante, le calcul infinitésimal, par la méthode des *vitesses* autrement des *fluxions*. Dans le système projectif, on opère les projections par des droites, lignes géodésiques du plan ; chaque surface a sa ligne géodésique déterminée comme la droite, généralement parlant, par deux conditions. Les belles découvertes de MM. Gauss et Jacobi sur ces lignes permettent d'espérer qu'on pourra étudier chaque surface à l'aide d'un système de coordonnées géodésiques, propres à cette surface. Déjà M. Gudermann, professeur à Munster, a réalisé cette idée, il y a dix-huit à dix-neuf ans, pour la sphère. Il prend pour *axes* deux lignes géodésiques, méridien et équateur, et projetant ensuite *orthogonalement* chaque point de la sphère sur ces axes par des lignes géodésiques, il prend pour *coordonnées* les *tangentes* des arcs interceptés sur les axes, depuis l'origine. Au moyen de cette convention, une ligne tracée sur la sphère est de même degré que le cône concentrique ayant cette ligne pour base ; ainsi un grand cercle est du premier degré, un petit cercle du second degré, de même l'ellipse sphérique, etc. Sans connaître ce travail, M. Borgnet a eu la même idée et l'a exécutée de la même manière. Le savant auteur a donné une analyse complète de son mémoire (V. p. 147) qui vient de paraître, antidaté pour prendre date. Des calculs simples, des formules utiles et élégantes, rendent cet opuscule précieux à l'enseignement et même à la science, ce qui n'est pas la même chose. C'est de la bonne analyse ; beaucoup de faits intéressants et peu de paroles ; le contraire de ce qu'on trouve ordinairement. On lit à la page 2 : « Nous ne connaissons pas la manière de » M. Gudermann ; ce qui nous porte à croire que notre ana- » lyse diffère de la sienne, c'est sa simplicité même. Il nous

» semble qu'une analyse si simple serait plus répandue, si les » principes en avaient déjà été exposés. » En effet, cette analyse, comme nous avons dit, est très-simple; toutefois elle ne diffère en rien de celle du professeur westphalien. M. Borgnet est étonné de ce que des principes si simples depuis si longtemps énoncés soient encore si peu répandus. Il est peut-être permis d'être étonné de cet étonnement. Voyons. Le système des coordonnées *linéaires*, de M. Plücker, si simple, si fécond, introduit il y a une douzaine d'années et préconisé naguère par M. Finck, est-il pratiqué, est-il connu? La méthode des homogènes depuis longues années employée en Allemagne, en Angleterre, est-elle connue? Bien plus : les méthodes projectives, métamorphiques, de réciprocité polaire, produits indigènes, sont-elles bien répandues? Dans notre pays, il n'y a que les théories *utiles* qui se propagent promptement. Utiles sont seulement celles qui servent aux examens, aux leçons, en d'autres termes, les théories qui se *payent*. Il ne faut pas s'en plaindre; c'est bien là le devoir, le travail du professeur que j'ai accompli longtemps le moins mal qu'il m'a été possible; mais, comme tout autre travail, il doit tendre sans cesse à se perfectionner; donner plus de produits, de meilleure qualité, avec moins de peine. Voulez-vous porter l'enseignement au niveau actuel de la science? Il n'y a qu'un moyen, et il est infaillible. Changez vos programmes d'examens, surtout celui de l'école polytechnique, le plus insuffisant, le plus arriéré de tous, vous opérerez une révolution salutaire, sans craindre que l'avenir ne démente cette épithète. Il est toutefois vrai que ce genre de révolution ne saurait exciter l'enthousiasme des ignorants, partout ici-bas en majorité, ni même parmi les savants; aucune ambition, aucune convoitise d'honneurs, de réputation, d'argent, ces locomotives du monde officiel, ne sont mises ici en jeu. Donc, rien ne se fera.

Voici ce que m'écrit un des plus savants professeurs de l'Université et que je n'ai pas le droit de nommer : « Il est de fait » que nous ne traduisons guère et que nous sommes arriérés » même en mathématiques pures. Un second fait est qu'il ne » suffit pas de traduire, il faut encore publier, et s'il est pos- » sible résumer ; or, dans notre malheureux temps où l'intérêt » personnel et pécuniaire est trop souvent l'unique mobile, » qui fera publier ces traductions ? Cela ne devrait-il pas re- » garder le ministère de l'instruction publique ? Cela posé, je » me dis : Au lieu d'attendre, pour donner à ceux des pro- » fesseurs qui travaillent, une pension de retraite suffisante, » qu'ils aient usé leurs forces par trente années de profes- » sorat, ne vaudrait-il pas mieux la leur donner quinze ans » plutôt, en mettant pour condition obligatoire que chaque » professeur prendrait connaissance de ce qui paraît à l'é- » tranger sur l'objet spécial de ses études et en publierait » un résumé méthodique, aux frais du ministère de l'instruc- » tion publique ? » Ce sont là des *pia desideria* qui se réaliseront, selon Mercier, l'an 2440 ; faut-il s'en affliger ? Rappelons une excellente observation de Bradley ; pour n'être pas astronomique, elle n'en est pas moins d'une grande justesse. La reine Anne, visitant l'Observatoire, s'enquit auprès de l'illustre directeur de ses appointements et les trouva modiques : « Que Votre Majesté se garde bien de les augmenter, reprit Bradley ; si jamais la place est bien rétribuée, il est à craindre qu'on ne la donne plus à un astronome. » Si l'on admet des *retraites exceptionnelles*, il est à craindre qu'on les accorde non à des Legendre, à des Lacroix, blanchis dans l'étude, mais à d'aimables professeurs de salon, vieillis dans la courtisanerie. Certes, si les règlements libéraux sont rares, leur juste application est quelque chose de plus rare encore.

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES.

PAR E. CATALAN.

(*Rectification.*)

Une grave erreur de calcul s'est glissée dans l'article *Sur les normales aux coniques*, inséré dans le dernier numéro des *Annales* (p. 337). La fin de cet article doit être modifiée ainsi qu'il suit :

9. Si l'équation (12) a ses trois racines réelles, l'équation (10) représentera trois couples de droites. Nous allons voir que, dans la même circonstance, il y aura quatre normales passant par le point donné ; et, conséquemment, que les trois couples de droites formeront un quadrilatère complet avec ses deux diagonales ; etc.

10. La condition de réalité des trois racines de l'équation (12) est :

$$(a^2p^2+b^2q^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4p^2q^2<0. \qquad (13)$$

Pour simplifier cette inégalité, posons :

$$\frac{ap}{c^2}=r^{\frac{3}{2}},\quad \frac{bq}{c^2}=s^{\frac{3}{2}}\ (*);$$

p et q peuvent être supposées positives; donc r et s le seront pareillement.

L'inégalité (13) devient d'abord

$$(r^3+s^3-1)^3+27r^3s^3<0\,;$$

d'où

$$r^3+s^3-1+3rs<0.$$

(*) J'emprunte cette transformation à un très-intéressant travail de M. Gerono, inséré dans le second volume de ce recueil.

On reconnaît facilement que le premier membre est divisible par $r+s-1$, et que le quotient peut se mettre sous la forme

$$(r-s)^2+(r+1)(s+1).$$

Ce quotient est donc positif ; et l'inégalité précédente se réduit à $r+s-1<0$, ou

$$(ap)^{\frac{2}{3}}+(bq)^{\frac{2}{3}}<c^{\frac{4}{3}}.$$

Celle-ci exprime que le point (p,q) est intérieur à la développée de l'ellipse, et, conséquemment, qu'il y aura quatre normales passant par ce point : la condition (13) exprime donc la même chose.

11. Remarquons en terminant que ce qui précède donne le moyen de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième.

THÉORÈMES DE M. STREBOR

Sur un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères concentriques ou par des paraboles confocales.

—

I. *Lemme.* Deux hyperboles concentriques se coupent orthogonalement lorsque les axes principaux de l'une sont les asymptotes de l'autre, et *vice versâ*.

II. *Lemme.* Deux hyperboles équilatères concentriques étant donnés par les deux équations

$$y^2+B_1xy-x^2+F_1=1\,; \quad y^2+B_2xy-x^2+F_2=0$$

(les axes étant nécessairement rectangulaires), si l'on a $B_1B_2+4=0$, les hyperboles se coupent orthogonalement, et *vice versâ*.

Observation. Si $B_1=0$, alors $B_2=\infty$; la première hyperbole étant alors rapportée à ses axes principaux, la seconde doit avoir ces axes pour asymptotes et prendre la forme Bxy

$+F=0$; ce qu'on obtient en remplaçant B_1 et F_1 par $\frac{B}{q}, \frac{F}{q}$ et faisant ensuite $q=0$.

III. *Théorème.* Étant donné un triangle plan formé par trois arcs d'hyperboles équilatères concentriques, si par chaque sommet on fait passer une hyperbole équilatère concentrique aux hyperboles données, et respectivement perpendiculaire au côté opposé, les trois hyperboles qu'on obtient ainsi vont concourir au même point (Strebor).

Démonstration. Soient

$$y^2+B_1xy-x^2+F_1=0;\quad y^2+B_2xy-x^2+F_2=0;$$
$$y^2+B_3xy-x^2+F_3=0,$$

les équations des trois hyperboles concentriques données; l'hyperbole équilatère, passant par l'intersection des deux premières et aussi concentrique, a une équation de cette forme:

$$y^2+\frac{pB_1+B_2}{p+1}xy-x^2+\frac{pF_1+F_2}{p+1}=0 \ (1),$$

p étant un multiplicateur quelconque. Pour que cette courbe coupe orthogonalement la troisième hyperbole, l'on doit avoir (*Lemme* (1) $\frac{pB_1+B_2}{p+1}.B_3+4=0$. Éliminant p, l'équation (1) prend la forme

$$B_3(B_1-B_2)y^2-4(B_1-B_2)xy-(B_3B_1-B_2)x^2+F_2(B_1B_3$$
$$+4)-F_1(B_2B_3+4)=0.$$

Les deux autres hyperboles ont pour équations :

$$B_1(B_2-B_3)y^2-4(B_2-B_3)xy-B_1(B_2-B_3)x^2+F_3$$
$$(B_2B_1+4)-F_2(B_3B_1+4)=0$$
$$B_2(B_3-B_1)y^2-4(B_3-B_1)xy-B_2(B_3-B_1)x^2+F_1$$
$$(B_3B_2+4)-F_3(B_1B_2+4)=0.$$

Or, une quelconque de ces équations est la différence des deux autres; donc les trois hyperboles passent par les deux mêmes points. C. Q. F. D.

Observation. Lorsque deux courbes *concentriques* se coupent, les points d'intersection sont toujours en nombre pair, et symétriquement placés par rapport au centre.

IV. La méthode projective orthogonale fournit le théorème général suivant : étant donné un triangle plan formé par trois arcs d'hyperboles concentriques, et dont les asymptotes sont *conjuguées* respectivement par rapport à une ellipse quelconque tracée dans le même plan, si par chaque sommet l'on mène une hyperbole concentrique aux précédentes, et telle qu'elle coupe le côté opposé en un point où les deux tangentes soient *conjuguées* par rapport à cette même ellipse, les trois hyperboles passent par les deux mêmes points.

V. La *méthode* des polaires réciproques mène à d'autres théorèmes.

Lemme. I. La polaire réciproque d'une hyperbole équilatère relativement à un cercle concentrique pris pour ligne directrice, est une hyperbole équilatère concentrique semblablement placée.

Lemme. II. Deux hyperboles équilatères concentriques ont en commun des tangentes parallèles.

Lemme. III. Les polaires réciproques de deux hyperboles équilatères concentriques et orthogonales relativement au même cercle concentrique, sont deux hyperboles équilatères concentriques se coupant aussi à angle droit.

Théorème. Étant données trois hyperboles équilatères concentriques, si l'on mène une des tangentes communes respectivement à la première et à la deuxième, à la deuxième et à la troisième, à la troisième et à la première ; si l'on mène une hyperbole équilatérale concentrique touchant la première tangente et perpendiculaire à la troisième hyperbole, et de même pour les deux autres tangentes, les trois hyperboles auront une tangente en commun.

VI. Les hyperboles équilatères données par les équations
$y^2 + B_1xy - x^2 + F_1 = 0$; $y^2 + B_2xy - x^2 + F_2 = 0$
se coupent sous un angle dont la tangente est égale à $\frac{2(B_1 - B_2)}{B_1B_2 + 4}$;
donc les polaires réciproques par rapport à un cercle directeur concentrique se coupent sous le même angle.

VII. Un théorème analogue au premier a lieu pour les arcs d'hyperboles équilatères bissectrices des angles du triangle donné. (Strebor.)

VIII. Deux théorèmes semblables aux précédents existent encore en considérant au lieu d'hyperboles équilatères concentriques des paraboles confocales. (Strebor.)

Observation. VII et VIII restent à démontrer.

ANNONCES.

NOTE

Sur le postulatum de géométrie dont il est question p. 93, 390 *et* 391.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Les observations auxquelles ce *postulatum* a donné lieu me font croire que ma pensée n'a pas été bien comprise. Je ne me suis point proposé d'établir *démonstrativement* des choses évidentes par elles-mêmes, ce que tout esprit sensé trouve justement inutile, mais de faire voir que dans beaucoup de ces propositions qui sont des *quasi-axiomes*, et peut-être dans toutes, il n'y a, au fond, qu'une seule et même difficulté ; ce qui est bien différent. Il me semble que cela n'est pas indigne de l'attention des géomètres.

Quant aux objections que M. Bernard, professeur au lycée de Tours, élève contre ma démonstration, je suis persuadé qu'il en fera lui-même justice, s'il veut prendre la peine de lire la proposition XII du 1er livre de la Géométrie de Legendre. On y démontre, sans le secours du *postulatum* en question, lequel n'apparaît d'ailleurs dans aucune des propositions précédentes, que la droite menée du sommet du triangle isocèle au milieu de la base est perpendiculaire à . Pour savoir si l'on peut démontrer qu'une droite qui en rencontre une autre d'un côté, passe, étant prolongée, de l'autre côté, M. Bernard n'a qu'à recourir aux quatre premières propositions du même livre.

Après ces explications, j'ose espérer qu'on voudra bien regarder ce petit débat comme terminé.

Note. Il est à regretter qu'on ne mette pas en tête des *Éléments*, la distinction que fait Leibnitz entre les *idées* certaines et *claires* et les idées *certaines* et non *claires* (*). Il est même à remarquer que ce dernier genre d'idées présente le plus grand degré de certitude; elles tiennent à la nature intime de l'esprit humain. Telles sont, en philosophie, les idées de l'existence, du moi, et l'idée même de la certitude; telles sont, en mathématiques, les contacts de divers ordres, les rapports finis entre quantités *naissantes*, idées certaines et qu'il est impossible de rendre *claires*; de même l'idée de la direction et de l'identité de direction qui constitue le parallélisme. Il faut bien qu'on arrive enfin à des *idées* non explicables et à des mots non définissables; là, il faut savoir s'arrêter. L'avantage des mathématiques est de tirer avec une extrême clarté, des conséquences immenses d'un petit nombre de notions obscures mais certaines.



SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE
des foyers dans les coniques.

PAR M. A. J. H. V.

—

Le calcul des coordonnées des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole, donné par mon ingénieux et laborieux élève M. Paul Serret, à la page 302 du présent volume, peut être présenté beaucoup plus simplement qu'il ne le fait, tout en s'appuyant sur le même principe. C'est ce que l'on peut voir dans les *Mémoires de la Société de Lille* pour 1830, où j'ai établi ce calcul à peu près comme il suit.

(*) Wolf, géomètre philosophe, a mis cette distinction.

En faisant d'abord

$$R^2 = B^2 + (A - C)^2,$$

$$K = A + C + R, \quad K' = A + C - R,$$

on a pour les carrés des valeurs des demi-axes et de la demi-excentricité :

$$a^2 = 2KG, \quad b^2 = 2K'G, \quad c^2 = 4GR,$$

formules dans lesquelles

$$G = \frac{F}{4AC - B^2}.$$

Ensuite, T et U représentant les coordonnées des sommets, on a encore, en faisant $H = A - C + R$, $H' = A - C - R$:

$$T^2 = \frac{KHG}{R}, \quad U^2 = -\frac{KH'G}{R}.$$

Enfin, t et u représentant les coordonnées des foyers, il suffit, soit de poser la proportion indiquée par M. Serret, comme je l'ai fait dans l'endroit cité, soit, plus simplement, comme je l'ai fait depuis, d'établir la proportion

$$t^2 : u^2 : c^2 :: T^2 : U^2 : A^2,$$

ce qui donne :

$$t^2 = 2HG, \quad u^2 = -2H'G.$$

A la vérité, les axes coordonnés sont ici supposés rectangulaires; mais la méthode est la même pour des axes quelconques; seulement les résultats sont un peu plus compliqués.

P. S. — J'avais déjà eu l'occasion de rappeler, dans *le Géomètre* de M. Guillard, p. 141, le théorème sur lequel s'appuie M. Serret, ainsi que l'usage auquel il l'applique. En même temps, j'en ai déduit ce corollaire :

Les couples de cordes menées par un foyer parallèlement à un système de diamètres conjugués, forment une somme constante dans l'ellipse et une différence constante dans l'hyperbole.

Cette somme ou cette différence est celle de l'axe focal et du paramètre de la courbe.

SUR L'ÉQUATION

qui donne les axes principaux des surfaces à centre du second degré.

PAR M. LEBESGUE.

(1) Le calcul de cette équation est presque aussi simple en partant de coordonnées obliques qu'en partant de coordonnées rectangulaires; on doit même dire qu'il est plus simple en ce sens que l'équation générale conduit immédiatement à des théorèmes que ne donnerait pas l'équation particulière.

Soit la surface à centre

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2ayz+2bxz+2cxy=1. \quad (a)$$

Si l'on rend maximum ou minimum

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2xz\cos\beta+2xy\cos\gamma; \quad (b)$$

sous la condition (a) on aura les équations

$$\frac{x+y\cos\gamma+z\cos\beta}{Ax+cy+bz}=\frac{y+z\cos\alpha+x\cos\gamma}{By+az+cx}=\frac{z+x\cos\beta+y\cos\alpha}{Cz+bx+ay}, \quad (c)$$

que l'on obtient encore en exprimant que le plan tangent en (x, y, z) est perpendiculaire sur la droite $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$.

Le système des équations (b), (c) fait trouver les axes principaux.

(2) Si l'on voulait éviter l'emploi du calcul différentiel, voici l'ordre de propositions qu'on pourrait adopter.

1° Valeur de la distance des points $(0, 0, 0)$, (x, y, z) pour un système de coordonnées obliques, on a :

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2yx\cos\gamma.$$

2° Valeur des cosinus de l'angle de deux droites ;

3° Valeur des cosinus des angles qu'une droite fait avec les trois axes ;

4° Équation d'un plan perpendiculaire à une droite qui fait avec les axes des angles λ, μ, ν, et à une distance r de l'origine c'est encore :

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = r.$$

5° Condition de perpendicularité du plan

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

et de la droite $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$, c'est précisément :

$$\frac{x+y\cos\gamma+z\cos\beta}{A}=\frac{y+z\cos\alpha+x\cos\gamma}{B}=\frac{z+x\cos\beta+y\cos\alpha}{C}.$$

Si l'on suppose que le plan soit tangent à la surface d'équation (a) on a les équations (c). J'ajouterais à ce qui précède que le volume du parallélipipède $H=xyz$ devient pour les coordonnées obliques :

$$H=xyz\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

(3) Ceci posé, pour résoudre les équations (b) (c), multiplions les trois fractions (c) respectivement par $\frac{x}{x}$, $\frac{y}{y}$ et $\frac{z}{z}$; puis ajoutant terme à terme, suivant le procédé de M. Cauchy, nous aurons r^2 pour valeur commune des trois fractions ; de là les équations

$$x(1-Ar^2)+y(\cos\gamma-cr^2)+z(\cos\beta-br^2)=0;$$
$$x(\cos\gamma-cr^2)+y(1-Br^2)+z(\cos\alpha-ar^2)=0;$$
$$x(\cos\beta-br^2)+y(\cos\alpha-ar^2)+z(1-cr^2)=0.$$

L'élimination des rapports $\frac{x}{z}=\frac{P}{R}$, $\frac{y}{z}=\frac{Q}{R}$ donnera une équation de la forme

$$Kr^6-Lr^4+Mr^2-N=0; \qquad (d)$$

car P, Q, R sont des fonctions de r^2.

Ayant trouvé les trois valeurs de r^2, l'équation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2xz\cos\beta + 2xy\cos\gamma$$

devient, à cause de $x = \frac{Pz}{R}$, $y = \frac{Q}{R}z$:

$$r^2 = \frac{z^2}{R^2}(P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2PR\cos\beta+2PQ\cos\gamma) = \frac{z^2U^2}{R^2}.$$

On aura donc :

$$z^2 = \frac{r^2R^2}{U^2},\ y^2 = \frac{r^2Q^2}{U^2},\ x^2 = \frac{r^2P^2}{U^2},$$

ce qui complète la solution.

Calcul fait, les valeurs de K, L, M, N sont :

$$K = ABC + 2abc - Aa^2 - Bb^2 - Cc^2,$$

$$L = AB + BC + CA - c^2 - b^2 - a^2$$

$$+ 2(bc - aA)\cos\alpha + 2(ac -)\quad \beta + 2(ab - cC)\cos\gamma,$$

$$M = A\sin^2\alpha + B\sin^2\beta + C\sin^2\gamma$$

$$- a(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) - b(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - c(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta),$$

$$N = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

(4) Si l'on pose $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$, d'où

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta = \sin^2\gamma = 1$$

et qu'on change r en $\frac{1}{s}$, on aura l'équation ordinaire.

Si l'on pose $a = b = c = 0$, ce qui suppose que l'équation $Ax^2 + By^2 + Cr^2 = 1$ représente la surface rapportée à un système de diamètres conjugués, l'équation devient, en divisant par ABC :

$$r^6 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) r^4 + \left(\frac{1}{BC}\sin^2\alpha + \frac{1}{AC}\sin^2\beta + \frac{1}{AB}\sin\gamma\right) r$$

$$- \frac{1}{ABC}(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = 0,$$

qui donne de suite trois théorèmes relatifs au parallélipipède des diamètres conjugués.

Sans entrer dans plus de détails, il est aisé de reconnaître qu'il y a réellement simplification.

L'équation générale (*d*) a été trouvée d'une autre manière par M. Jacobi (J. de Crelle, t. II, p. 227); elle aura probablement déjà été exposée comme il a été fait plus haut, car c'est l'imitation d'une solution bien connue. L'objet de cette note ne peut donc être que de recommander l'application des méthodes générales, ce qui est ordinairement le meilleur moyen de simplification.

THÉORÈME DE MINIMUM

dans le triangle plan.

PAR M. POUDRA,
Chef d'escadron d'état-major.

---

1. *Théorème.* Si par chaque angle d'un triangle, on mène une droite qui coupe le côté opposé en deux segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, les trois droites se coupent en un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux côtés du triangle est un minimum, relativement à la même somme pour d'autres points de l'espace.

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer les points situés dans le plan du triangle (*).

Soit ABC le triangle et O le point qui remplit la condition du minimum, et soient OA′, OB′, OC′ les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés BC, AC, AB; menons les droites A′B′, B′C′, C′A′, OA′, OB′, OC′; si l'on cherche un point tel que la somme des carrés de ses distances aux *angles* du triangle A′B′C′ soit un minimum, il est évident que le point

(*) On est prié de faire la figure.

O remplit encore cette condition-là. Donc, d'après un théorème connu, O est le centre de gravité du triangle A'B'C'; donc les trois triangles OA'B', OA'C', OB'C' sont équivalents, et l'on a successivement :

$$OB'.OA'.\sin C = OA'.OC'.\sin B\,; \quad \frac{OB'}{OC'} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB}.$$

Dans le triangle rectangle, le point cherché est au milieu de la hauteur.

Prolongeons la droite jusqu'à ce qu'elle se rencontre avec BC en M et abaissons de M la perpendiculaire MB'' sur AC et MC'' sur AB, l'on a :

$$\frac{MB''}{MC''} = \frac{OB'}{OC'} = \frac{AC}{AB} = \frac{MC \sin C}{MB.\sin B} = \frac{MC.AB}{MB.AC}\,;$$

d'où
$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Note. *Solution générale analytique.*

Soit un système quelconque de n droites situées dans le même plan ; prenons des axes rectangulaires.

Soit $d_p y + e_p x + f_p = 0$ l'équation d'une quelconque de ces n droites ; donnant à l'indice p successivement les valeurs 1. 2. 3...... n, on aura les équations des n droites, et soit encore α_p l'angle qui forme la droite d'indice p avec l'axe des x : Y, X étant les coordonnées d'un point quelconque du plan, sa distance à la droite d'indice p est :

$$Y\cos\alpha_p - X\sin\alpha_p + \frac{f_p \cos\alpha_p}{d_p}.$$

Si on élève cette expression à la puissance m et qu'on donne à p toutes les valeurs 1, 2..... n, on aura les sommes des puissances d'ordre m de toutes les distances du point (X, Y) au système de droites. Si cette somme est une quantité constante, le lieu du point m est une ligne d'ordre m, qui ne peut admettre des asymptotes rectilignes que lorsque

m est impair. Si l'on veut que cette somme soit un minimum, il faut égaler à zéro la dérivée par rapport à Y et la dérivée par rapport à X, et les points cherchés sont donnés par l'intersection de deux lignes d'ordre $m-1$; il y a donc généralement $(m-1)^2$ points qui répondent à la question. Il est d'ailleurs évident que pour qu'il y ait un minimum *fini*, il faut que m soit pair. Faisons $m=2$; alors pour une constante donnée le lieu est une ellipse, car le B^2-4AC y est une somme de carrés négatifs. Les coordonnées du centre sont indépendantes de la constante ; donc ce centre est fixe et il est le point qui répond au *minimum* ; car, en ce cas, l'ellipse se réduit à un point.

Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$, l'équation de l'ellipse ; où $A=\Sigma_1^n\cos^2\alpha_p$; $B=-2\Sigma_1^n\sin\alpha_p\cos\alpha_p$; $C=\Sigma_1^n\sin^2\alpha_p$.

$D=\Sigma_1^n\frac{fp}{dp}\cos^2\alpha_p$; $E=-\Sigma_1^n\frac{fp}{dp}\sin\alpha_p\cos\alpha_p$ et F est la constante prise négativement. Lorsque l'ellipse se réduit à son centre l'on a $AE^2-BDC+CD^2+F(B^2-4AC)=0$; ce qui donne la valeur F de la constante dans le cas du minimum.

III. Les mêmes raisonnements ont lieu pour un système de plans ; car la distance d'un point à un plan est aussi une fonction linéaire des coordonnées de ce point.

IV. Dans le triangle ABC, le carré de la distance du point cherché au sommet A est $\frac{c^2b^2[b^2+c^2+2bc\cos A]}{(a^2+b^2+c^2)^2}$.

RELATIONS D'IDENTITÉS

et questions fondamentales relatives aux lignes du second degré : polaires réciproques (v. p. 315).

—

LXXXV. *Problème.* Etant données l'équation d'une courbe

plane algébrique et celle de la conique directrice, trouver l'équation de la polaire réciproque.

Solution. Mêmes données qu'au problème précédent (LXXXIV). Soient x', y' les coordonnées d'un point de la courbe donnée ; la tangente en ce point a pour équation $Py+Qx+R=0$; P, Q, R sont des fonctions connues de x', y', et de degré $m-1$; x'', y'' étant les coordonnées du pôle de cette tangente, pris par rapport à la directrice, on a :

$$x''\,[\pi' P+\pi Q+\mu R]=-\nu P+\gamma Q+\pi R\,,$$

$$y''[\pi' P+\pi Q+\mu R]=-\nu Q+\gamma' P+\pi' R \ (1)$$ (*V.* t. II, p. 305).

Eliminant x', y' entre ces deux équations, et l'équation donnée, on obtient en x'', y'' l'équation de la polaire réciproque.

Corollaire. Les formules donnent :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{P}{R}=\dfrac{2\alpha y''+\beta x''+\delta}{\delta y''+\varepsilon \qquad \xi} \\[2ex] \dfrac{Q}{R}=\dfrac{\nu x''+\beta y''+\varepsilon}{\varepsilon x''+\delta y''+2\xi} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Donc si l'équation de la courbe est donnée en fonction de $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$, on a de suite la polaire réciproque.

Autrement. Rendons homogène l'équation de la courbe donnée et celle de la conique directrice, en remplaçant x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ (*V.* p. 5), et représentons par $\varphi=0$ et $\psi=0$ les équations de la directrice et celle de la polaire réciproque ; les équations (3) donnent :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dF}{dy'}\cdot\dfrac{d\varphi}{dz''}-\dfrac{d\varphi}{dy''}\cdot\dfrac{dF}{dz'}=0 \\[2ex] \dfrac{dF}{dx'}\cdot\dfrac{d\varphi}{dz''}-\dfrac{d\varphi}{dx''}\cdot\dfrac{dF}{dz'}=0 \end{array}\right\} \quad (3) \text{ et aussi } (4)\ (*)$$

(*) Nous nous servirons constamment, et à dessein, de l'algorithme leibnitzien

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\psi}{dy''}\cdot\frac{d\varphi}{dz'}-\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{d\psi}{dz''}=0\\ \frac{d\psi}{dx''}\cdot\frac{d\varphi}{dz'}-\frac{d\varphi}{dx'}\cdot\frac{d\psi}{dz''}=0\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Pour avoir $\frac{d\varphi}{dz''}$ on change x, y, z en x'', y'', z'', et ainsi des autres.

Les deux premières équations donnent :

$$\frac{dF}{dy'}\cdot\frac{d\varphi}{dx''}-\frac{dF}{dx'}\cdot\frac{d\varphi}{dy''}=0. \quad (5)$$

L'équation $F=0$ étant homogène, l'on a :

$$x'\frac{dF}{dx'}+y'\frac{dF}{dy'}+z'\frac{dF}{dz'}=0 \quad (V. \text{ p. } 1).$$

Multipliant donc la première équation (4) par y' et la seconde par x', et les ajoutant, il vient, après avoir divisé par $\frac{dF}{dy}$:

$$x'\frac{d\varphi}{dx''}+y'\frac{d\varphi}{dy''}+z'\frac{d\varphi}{dz''}=0 \quad (6),$$

équation du second degré et qui remplace avantageusement une équation (4) de degré m. L'interprétation géométrique est que la polaire du point x'', y'', z'' passe par le point x', y', z'; elle est symétrique par rapport aux variables à un accent et à deux accents, ce qui constitue la réciprocité polaire.

***Application.* La courbe donnée est une conique à équation hexanome ordinaire ; les équations (3) deviennent :**

---

d pour désigner les dérivées ; algorithme que les professeurs de lycée sont tenus en conscience et devraient être astreints d'enseigner ; l'ignorance chez les élèves d'un symbole qui domine toute la science serait honteuse, non pour eux, mais pour leurs professeurs.

$$\left[2A\frac{d\varphi}{dz''}-D\frac{d\varphi}{dy''}\right]+x'\left[B\frac{dx}{dz''}-E\frac{d\varphi}{dy''}\right]$$

$$+z'\left[D\frac{d\varphi}{dz''}-2F\frac{d\varphi}{dy''}\right]=0,$$

$$y'\left[B\frac{d\varphi}{dx''}-D\frac{d\varphi}{dx'}\right]+x'\left[2C\frac{d\varphi}{dx''}+G\frac{d\varphi}{dx''}\right]$$

$$+z'\left[E\frac{d\varphi}{dz''}-2F\frac{d\varphi}{dx''}\right]=0,$$

$$x'=\frac{z'\left[-n\frac{d\varphi}{dy''}+l\frac{d\varphi}{dx'}+k\frac{d\varphi}{dz''}\right]}{m\frac{d\varphi}{dz''}+k\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dy''}}$$

$$y'=\frac{z'\left[-n\frac{d\varphi}{dx''}+l'\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dz}\right]}{m\frac{d\varphi}{dz''}+k\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Prenant la valeur de x' et y' et substituant dans l'équation donnée qui devient divisible par z', et effaçant les accents, on obtient l'équation suivante de la polaire réciproque :

$$m\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2+l'\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+l\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+2k'\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$

$$+2k\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)-2n\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0;$$

et faisant $z=1$, on a l'équation ordinaire.

Soit cette équation :

$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'yz+E'xz+F'z^2=0,$$

on a : $A'=m\delta^2+4l'\alpha^2+l\beta^2+4k'\alpha\delta+4k\beta\delta-4n\alpha\beta,$

$$B'=2m\delta\varepsilon+4l'\alpha\beta+4l\beta\gamma+9k'(\beta\delta+2\alpha\varepsilon)+2k[\beta\varepsilon+2\gamma\delta]$$
$$-2n(\beta^2+4\alpha\gamma),$$

$$D'=4m\delta\zeta+4l'\alpha\delta+4l_{,}\varepsilon+2k'(1\varepsilon\zeta+\delta^2)+2k[2\beta\zeta+\delta\varepsilon)$$
$$-2n[2\delta\varepsilon+\beta\delta],$$

$$F'=4m\zeta^2+l'\delta^2+l\varepsilon^2+4k'\delta\zeta+4k\varepsilon\zeta-2n\delta\varepsilon.$$

On conclut C′ de A′ et E′ de D′ en permutant l, k, α, δ, en $l', k', \gamma, \varepsilon$, et *vice versâ*.

1° Prenant pour origine un foyer de la courbe donnée et les axes rectangulaires, alors $l=l'$, $n=0$, et pour directrice un cercle ayant son centre à l'origine, on a $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta=\varepsilon=0$, ce qui donne $A'=4l\alpha^2$, $\beta=0$, $C'=4l\alpha^2$, $D'=8k'\alpha\zeta$, $E'=8k\alpha\zeta$, $F'=4m\zeta^2$; ainsi la polaire réciproque est aussi un cercle. (*V.* p. 315.)

2° Soient $Ay^2+Cx^2+F=0$ la conique donnée et $\alpha y^2+\gamma x^2+\zeta^2=0$ la directrice; on a pour équation de la polaire réciproque $CF\alpha^2y^2+AFy^2x^2+AC\zeta^2=0$. Pour que cette polaire se confonde avec la courbe donnée, l'on doit avoir $\frac{A}{F}=\pm\frac{\zeta}{\alpha}$, $\frac{F}{C}=\pm\frac{\zeta}{\gamma}$; ainsi une ellipse et une hyperbole ayant mêmes axes principaux, l'une de ces courbes étant prise pour directrice, l'autre sera elle-même sa polaire réciproque. (*V.* t. V, 368.)

LXXXVI. *Méthode mnémonique.* L'équation de la polaire réciproque peut s'écrire sous une forme qui la grave aisément dans la mémoire.

Soient $Ay^2+\beta xy+Cx^2+Dyz+Fxz+Fz^2=0$,

$$\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2+\delta yz+\varepsilon xz+\zeta z^2=0=\varphi;$$

les équations rendues homogènes de la conique donnée et de la directrice; l'équation de la polaire réciproque est :

$$\frac{dL}{dA}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\frac{2dL}{dB}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dL}{dC}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{2dL}{dD}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}$$

$$+\frac{2dL}{dE}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{dL}{dF}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=0. \qquad (a)$$

Ainsi, dans l'équation donnée, on remplace les coefficients A, B, C, etc., par $\frac{dL}{dA}$, $\frac{dL}{dB}$, et les variables x, y, z, par

Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe donnée, on a une équation aux différences partielles du premier ordre et de degré m, dont l'équation de la polaire réciproque représente l'intégrale ; ainsi les polaires réciproques peuvent servir à trouver l'intégrale des équations aux différences partielles à trois variables, homogènes par rapport aux coefficients différentiels.

LXXXIX. *Problème.* Connaissant l'équation *enveloppe* d'une ligne, trouver l'équation aux coordonnées ordinaires de la polaire réciproque et ensuite de la ligne donnée.

Solution. Soit $F(p, q) = 0$ (p. 9) l'équation *enveloppe* de la courbe donnée ; $\varphi = 0$ l'équation de la directrice et $\psi = 0$ l'équation de la polaire réciproque, soit x'', y'' un point de cette polaire, l'équation de la polaire de ce point est :

$$x\frac{d\varphi}{dx''}+y\frac{d\varphi}{dy''}+z\frac{d\varphi}{dz''}=0.$$

Cette droite par son mouvement décrit la courbe donnée ; donc

$$p=-\frac{\frac{d\varphi}{dx''}}{\frac{d\varphi}{dz''}};\quad q=-\frac{\frac{d\varphi}{dy''}}{\frac{d\varphi}{dz''}}.$$

Ainsi, effaçant les accents, l'équation de la polaire réciproque est en coordonnée ordinaire :

$$F\left(-\frac{\frac{d\varphi}{dx''}}{\frac{d\varphi}{dz''}},\ -\frac{\frac{d\varphi}{dy''}}{\frac{d\varphi}{dz''}}\right)=0;$$

et cherchant ensuite la polaire réciproque de celle-ci, on obtient l'équation des coordonnées ordinaires de la ligne donnée.

Application. 1° *Équation enveloppe.*

$$p^2+q^2-2pq\cos\gamma=a^2p^2q^2;$$

c'est l'enveloppe d'une droite de longueur constante a inscrite dans un angle γ.

Soit $$\varphi=x^2+y^2-r^2z^2=0;$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=2x;\ \frac{d\varphi}{dy}=2y;\ \frac{d\varphi}{dz}=-2r^2z.$$

$p=\frac{x}{r^2z}$; $q=\frac{y}{r^2z}$ et l'équation de la polaire réciproque est : $r^4z^2(x^2+y^2-2xy\cos\gamma)=a^2x^2y^2$, où l'on peut faire $z=1$.

2° *Équation enveloppe.*

$$a^2q^2+b^2p^2=c^4p^2q^2;\quad c^2=a^2-b^2;$$

c'est l'équation *enveloppe* de la développée de l'ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2z^2 \text{ (axes rectangulaires)};$$

soit $\varphi=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2z^2=0$; $\frac{d\varphi}{dx}=2b^2x$; $\frac{d\varphi}{dy}=2a^2y$;

$\frac{d\varphi}{dz}=-2a^2b^2z$; $p=\frac{-x}{a^2z}$; $q=\frac{-y}{b^2z}$; il vient pour équation de la polaire réciproque : $z^2(a^6y^2+b^6x^2)=c^4x^2y^2$, qui appartient aussi à l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, mais alors $c^2=a^2+b^2$.

Prenons $\varphi=x^2+y^2-r^2z^2=0$; il vient :

$$r^4z^2(a^2y^2+b^2x^2)=c^4x^2y^2;\ \text{faisant } z=1,\ r=c,$$

on a : $$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

XC. *Coniques confocales.* Une conique ayant pour directrice un cercle confocal, a un second cercle pour polaire réciproque ; à l'aide de ce théorème (*V.* p. 413), une foule

de problèmes sur les coniques peuvent se ramener à d'autres problèmes sur le cercle.

S'il s'agit, par exemple, d'inscrire dans une conique un polygone circonscrit à un polygone donné, ou bien de circonscrire à une conique un polygone inscrit dans un polygone donné, il suffira de savoir résoudre ce genre de questions pour le cercle; de même étant données deux coniques, ayant un foyer en commun, les recherches des points d'intersection de ces coniques, ou des tangentes communes, n'exigent que les solutions des mêmes questions pour deux cercles. On sait, depuis Newton, que la construction du cercle tangent à trois cercles, s'effectue par l'intersection de deux coniques confocales; intersection qu'on obtient géométriquement, sans avoir besoin de décrire les coniques, en menant des tangentes communes à deux cercles.

XCI. *Méthode des homogènes;* application aux lignes du troisième degré. Soit $F=0$ l'équation rendue homogène de la ligne donnée, $\varphi=0$ l'équation également homogène de la conique directrice (LXXXIV), soit x', y', z' les coordonnées d'un point de la polaire réciproque, on a (LXXXV) :

$$x'=\lambda\frac{dF}{dx}-\nu\frac{dF}{dy}+\varkappa\frac{dF}{dz},$$

$$y'=-\nu\frac{dF}{dx}-\lambda'\frac{dF}{dx}+\varkappa'\frac{dF}{dz},$$

$$z'=\varkappa\frac{dF}{dx}+\varkappa'\frac{dF}{dy}+\mu\frac{dF}{dz}.$$

On en déduit linéairement :

$$2\Lambda\frac{dF}{dx}=2\gamma x'-\beta y'+\varepsilon z',$$

$$2\Lambda\frac{dF}{dy}=-\beta x'+2\alpha y'+\delta z',$$

$$2\Lambda\frac{dF}{dz}=\varepsilon x'+\delta y'+2\zeta z'.$$

Posons

$$\frac{dF}{dx}+px_{1}=0;\quad \frac{dF}{dy}+py_{1}=0;\quad \frac{dF}{dz}+pz_{1}=0. \quad (1)$$

x_1, y_1, z_1 sont des fonctions linéaires en x', y', z' ; on déduit de ces trois équations, par le théorème des homogènes :

$$xx_1+yy_1+zz_1=0. \quad (2)$$

Éliminant x, y, z, p, entre deux des équations (1), l'équation (2) et $F=0$. On aura une équation entre x_1, y_1, z_1, et par conséquent entre x', y', z'.

Nous allons suivre pour l'équation du troisième degré la marche de M. Arthur Cayley (*the Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. I[er], p. 97, 1846, deuxième série).

Soit $F=3U=ax^3+by^3+cz^3+3iy^2z+$
$+3jz^2x+3kx^2y+3i_1yz^2+3j_1zx^2+3k_1xy^2+6lxyz=0$,

l'équation (2) fournit : $x^2x_1+xyy_1+xzz_1=0$;
$xyx_1+y^2y_1+yzz_1=0$; $xzx_1+yzy_1+z^2zy_1=0$.

Ces trois équations sont homogènes et du second degré en x, y, z ; de même les équations (1).

Si l'on avait encore une équation $\phi=0$ de ce genre, on pourrait éliminer *linéairement* de ces sept équations les sept quantités x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, p.

Voici comment l'auteur se procure cette septième équation.

Faisons

$$\frac{d^2U}{dx^2}=2L;\quad \frac{d^2U}{dydx}=2T;\quad \frac{d^2U}{dxdz}=2S,$$

$$\frac{d^2U}{dy^2}=2M;\quad \frac{d^2U}{dydz}=2R,$$

$$\frac{d^2U}{dz^2}=2N.$$

L, M, O, R, S, T sont homogènes du 1[er] degré en y, x, z.

Les équations (1) donnent, d'après le principe des homogènes :

$$Lx + Ty + Sz + px_1 = 0,$$
$$Tx + My + Rz + py_1 = 0,$$
$$Sx + Ry + Nz + pz_1 = 0.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (2), on peut éliminer linéairement x, y, z, p, et l'on obtient une équation homogène du 2me degré; car les termes tels que LMN du 3me degré se trouvent au dénominateur dans les valeurs de x, y et z, et s'en vont; ces valeurs étant substituées dans l'équation (2), on a la fonction cramérienne :

$$\Phi = -\left\{\begin{matrix} L, T, S, x_1, \\ T, M, R, y_1, \\ S, R, N, z_1, \\ x_1, y_1, z_1, \end{matrix}\right\} = 0,$$

fonction qui a cette forme :

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy = 0.$$

On trouve dans le mémoire cité les valeurs des six quantités A, B, C, F, G, H calculées en fonction des coefficients de l'équation $U = 0$ et x_1, y_1, z_1; ensuite, on effectue l'élimination ci-dessus indiquée, et l'on arrive à une équation du 6me degré en x_1, y_1, z_1, équation qui occupant trois pages et demie in-8°, nous ne pouvons pas la transcrire; mais il est utile de savoir que ce résultat existe tout calculé; il peut servir à vérifier des cas particuliers. On voit *à priori* que cette équation ordonnée par rapport à y_1, x_1, z_1, contient 28 termes polynômes, mais il suffit d'en calculer 7; les 21 autres s'en déduisent par de simples mutations de lettres.

PROBLÈME COMBINATOIRE.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

On a 21 cartes qu'on distribue 3 par 3 en 3 paquets de 7 cartes; on fait penser une carte, et on demande le paquet qui la contient, et on le place au milieu du paquet total formé par les 3 paquets : on fait la même distribution une 2me fois, on demande le paquet, on le place au milieu : on fait une 3me distribution, et on place le paquet de la carte au milieu. La carte se trouve au milieu du paquet total, c'est-à-dire au onzième rang.

Ce fait est général pour $2m+1$ paquets composés de $2n+1$ cartes. Suivant les valeurs relatives de m et n, il arrive après la seconde, la troisième ou la $p^{\text{ème}}$ distribution.

Après la première, la carte est dans le $(m+1)^{\text{ème}}$ paquet, au rang q. Nous supposerons $q>n+1$; s'il lui était égal, le fait aurait déjà eu lieu ; s'il lui était inférieur, la distribution commencée par la dernière carte du paquet total nous ferait retomber dans le cas que nous examinons. Prenons pour q sa valeur maximum $2n+1$.

Si $n =$ ou $<m$, à la seconde distribution, toutes les cartes des m premiers paquets et les $n+1$ premières cartes du $(m+1)^{\text{ème}}$ paquet étant distribuées, la carte viendra occuper le $(n+1)^{\text{ème}}$ rang dans l'un des m derniers paquets que forme cette seconde distribution. Le fait a eu lieu après la seconde distribution.

Si $n>m$, à une distribution quelconque, la carte viendra occuper le $(n+1)^{\text{ème}}$ rang ; si elle est distante de la carte du

milieu d'un nombre de rangs égal ou inférieur à m, et le $(n+1+m)^{\text{ème}}$ rang, si elle en est distante d'un nombre égal ou inférieur à $m+m(2m+1)$. Si donc on a les inégalités $n > m$ et $< m+m(2m+1)$ ou égal, ce sera après la troisième distribution que la carte occupera le $(n+1)^{\text{ème}}$ rang. Ainsi, pour 3 paquets de 7 cartes, $m=1$ et $n=3$, et l'on a bien $3>1$ et <4 ; pour 7 paquets de 49 cartes, $m=3$ et $n=24$, et l'on a bien $24>3$ et $=24$; pour $2m+1$ paquets de $(2m+1)^2$ cartes, on a $n=2m^2+2m$, et l'on a bien $2m^2+2m > m$ et $=m+(2m+1)m$.

Si $n > m+m(2m+1)$, après la seconde distribution, la carte aura dans son paquet un rang supérieur à $n+1+m$, et après la troisième distribution, ne pourra occuper le rang $n+1$. Elle y viendra après la quatrième, si après la troisième elle occupe un rang supérieur à $n+1+m$ et inférieur ou égal à $n+1+2m$, c'est-à-dire si après la seconde elle occupe un rang inférieur ou égal à $n+1+m+2m(2m+1)$; si donc $n > m+n(2m+1)$ et $< m+2m(2m+1)$ ou égal, le fait aura lieu après la quatrième distribution.

En général, le fait a lieu après la $p^{\text{ème}}$ distribution pour $n > m+(p-3)m(2m+1)$ et $< m+(p-2)m(2m+1)$ ou égal.

SECONDE DÉMONSTRATION

du théorème de Newton sur les asymptotes (V. p. 385) *et théorème sur les points multiples.*

—

Lemme 1. $P_n + P_{n-1} + \dots P_{n-p} + \dots P_0 = 0$ (1) étant une équation de degré n, P_n renferme les termes de degré n et ainsi des autres. Si l'on compose une fonction symétrique

entière de degré p avec les n segments, comptés de l'origine sur un des axes coordonnés, la valeur de cette fonction dépend de coefficients qui se trouvent dans les fonctions :

$$P_n,\ P_{n-1} \ldots\ldots P_{n-p}.$$

Corollaire 1. La valeur de cette fonction ne change donc pas pour deux courbes qui ont les termes $P_n + P_{n-1} + \ldots + P_{n-p}$ en commun.

Corollaire 2. L'équation qui renferme le système des asymptotes à la courbe a avec elle en commun $P_n + P_{n-1}$ donc $p = 1$; et désignant la fonction symétrique du 1er degré par ΣX pour les asymptotes et par Σx pour la courbe, on a $\Sigma X = \Sigma x$ ou bien $\Sigma (X - x) = 0$; c'est le théorème de Newton ; car une sécante quelconque peut être prise pour axe des x.

Corollaire 3. Les intersections de deux courbes ayant en commun les $p + 1$ premiers polynômes sont évidemment sur une courbe de degré $n - p - 1$; donc si $p = 1$, les intersections sont sur une ligne de degré $n-2$; par conséquent sur une droite pour les lignes du troisième ordre et sur une conique pour une ligne du quatrième ordre.

2. M. Plucker, dans son Traité de géométrie analytique de 1835 (*), a donné la discussion et la théorie des propriétés les plus complètes des courbes du troisième ordre ; en prenant pour axes des coordonnés la droite des intersections asymptotiques, on simplifie l'équation et on facilite les démonstrations. Nous ne mentionnons pour le moment que cette proposition. Soit $U = 0$ l'équation rendue homogène d'une

(*) System der analytischen geometrie auf neue betrachturgen gegrundet und insbesendere eine ausfuhrliche theorie der curven dritten ordnung enthaltend. Bonn, 1835, in-4., 222 p. Système de géométrie analytique fondé sur de nouvelles considérations, et contenant en particulier une théorie complète des courbes du troisième ordre.

ligne de l'ordre n ; si ces trois équations subsistent $\frac{dU}{dx}=0$; $\frac{dU}{dy}=0$; $\frac{dU}{dz}=0$, la courbe a des points multiples ; ces points satisfont donc à l'équation $\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dz}=0$; donc les points multiples sont sur une ligne d'ordre $n-1$, par conséquent sur une conique dans une courbe du troisième degré.

NOTE RECTIFICATIVE,

relative à la question 97 (t. VI, p. 399).

PAR M. MENTION.

« Couper un triangle par une transversale, de manière que trois segments non consécutifs soient égaux. »

Voici quelques remarques pour servir de rectification à la note de la page 399, tome VI.

Dans tous les cas qui se présentent, on est ramené aux équations

$$(1) \qquad 2px^2 - x(ab+ac+bc) + abc = 0,$$
$$2(p-a)x^2 + x(ab+ac-bc) - abc = 0,$$

et deux autres de cette seconde espèce.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Telles sont les conditions de réalité de racines de l'équation (1).

La sécante cherchée est tangente à trois paraboles : on est en effet conduit, par des considérations très-simples, à chercher l'enveloppe des droites mobiles qui sont divisées en deux parties égales par une ligne donnée, comprise entre deux autres fixes (*).

NOTE

sur les valeurs qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, *dans les fonctions à une seule variable.*

PAR M. G.-H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au lycée Monge.

On peut être embarrassé aux examens par les expressions qui prennent la forme d'indétermination $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. Une simple transformation lève quelquefois la difficulté ; mais ces artifices ne réussissent pas toujours. Pour obvier à cet inconvénient, je crois utile de donner aux candidats la méthode fondée sur les dérivées.

Soient x la variable et y la fonction, liées par $y=f(x)$; h et k étant les accroissements respectifs, on a, comme on sait :

$$\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon.$$

ε est une quantité aussi petite qu'on voudra et s'annulant avec h ; $f'(x)$ est ce qu'on appelle la dérivée de $f(x)$, c'est la limite de l'accroissement de la fonction à celui de la variable.

(*) *La ligne donnée* sera, par exemple, une de celles qui passent par les milieux des côtés et interceptent dans les angles du triangle ou les adjacents des triangles isocèles. Les deux lignes fixes seraient deux côtés du triangle.

On sait aussi que cette limite existe toujours, quelle que soit $f(x)$, en d'autres termes, que toute fonction a sa dérivée.

On tire de l'équation précédente :

$$f(x+h)=f(x)+h\{f'(x)+\epsilon\} \qquad (1)$$

Cela posé, soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ la fraction devenant $\frac{0}{0}$ pour $x=a$.

Pour avoir la véritable valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$, observons qu'en vertu de (1) on a :

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)}=\frac{f(x)+h\{f'(x)+\epsilon\}}{F(x)+h\{F'(x)+E\}}.$$

Et comme $f(a)=0$, $F(a)=0$, il viendra, en supprimant le facteur h :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a)+\epsilon}{F'(a)+E},$$

quelque petit que soit h ; donc pour $h=0$, on aura :

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}. \qquad (2)$$

Par conséquent, pour avoir la vraie valeur de la fraction $\frac{f(a)}{F(a)}$, il faut prendre le rapport des dérivées de ses deux termes et y faire $x=a$.

Si ce dernier rapport devient encore $\frac{0}{0}$, on conçoit bien qu'il faudra le traiter de même, c'est-à-dire prendre de nouveau les dérivées de ses deux termes et y faire $x=a$; et ainsi de suite, et si on peut arriver à deux dérivées ne s'annulant pas à la fois, leur rapport sera la vraie valeur de la fraction proposée.

Cette règle s'étend au cas où $\frac{f(x)}{F(x)}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=a$.

En effet,
$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Et comme $f(a)=\infty$, $F(a)=\infty$, donc, le dernier rapport devenant $\frac{0}{0}$, on peut lui appliquer la règle de (2). Or le rapport des dérivées de ses deux termes est :

$$\frac{\frac{F'(x)}{\{F(x)\}^2}}{\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}},$$ ou bien en effectuant les calculs, $\left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}^2\times\frac{F'(x)}{f'(x)}$;

donc en vertu de (2),

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\left\{\frac{f(a)}{F(a)}\right\}^2\times\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Actuellement, si la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ n'est ni 0 ni ∞, en supprimant le facteur commun, il vient :

$$1=\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{F'(a)}{f'(a)} \text{ ou bien } \frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}. \qquad (3)$$

Si la valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ est 0, et le cas où elle est ∞ se ramène à celui-ci en renversant la fraction, voici comment M. Liouville opère (*Journal de mathématiques pures*, t. VIII) : ajoutons à la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ supposée nulle pour $x=a$, la constante C, la somme sera :

$$\frac{f(x)+CF(x)}{F(x)}.$$

Or pour $x=a$ cette fraction devient $\frac{\infty}{\infty}$, et comme alors sa valeur est précisément la constante C qui n'est ni 0 ni ∞,

on pourra lui appliquer la règle (3), c'est-à-dire prendre le rapport des dérivées, qui est :

$$\frac{f'(x)+CF'(x)}{F'(x)}, \text{ ou bien } \frac{f'(x)}{F'(x)}+C, \text{ et y faire } x=a,$$

ce qui donne : $C=\frac{f'(a)}{F'(a)}+C$ d'où $\frac{f'(a)}{F'(a)}=0$.

et par suite : $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Par conséquent, quelle que soit la valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\infty}{\infty}$, la règle est la même.

Donc généralement, que $\frac{f(a)}{F(a)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on a toujours ...... $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}$. (4)

Il y a ici une remarque importante à faire sur $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Toutes les fois que la valeur de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ est déterminée, comme c'est celle de $\frac{f(a)}{F(a)}$, cette dernière est aussi déterminée ; mais la réciproque n'est pas vraie. La vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$, observe M. Liouville, peut être déterminée et celle de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ rester essentiellement indéterminée. Ainsi pour $x=\infty$ la vraie valeur de :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x}, \text{ qui peut s'écrire } \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

est l'unité ; tandis que le rapport des dérivées des deux termes $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ reste tout à fait indéterminé. C'est ce qu'on

voit, du reste, en faisant $x = 2k\pi + \alpha$ et $k = \infty$, α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Par là le rapport des dérivées devient $\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$. Quantité évidemment indéterminée.

Applications. On suppose ici que les candidats savent prendre la dérivée d'une fonction algébrique et des transcendantes $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{L}x$, a^x.

1° $\frac{0}{0}$,

$\frac{\sin x}{x}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$; le rapport des dérivées est $\frac{\cos x}{1}$, or $\frac{\cos x}{1} = 1$, donc $\frac{\sin 0}{0} = 1$. Ce que l'on savait déjà.

Plus généralement, $\frac{\sin^m x}{x^n}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$. Le rapport de ses dérivées, $\frac{m \sin^{m-1} x \cos x}{n x^{n-1}}$ est encore $\frac{0}{0}$. Mais comme c'est $\frac{\sin^{m-1} x}{x^{n-1}}$ qui devient $\frac{0}{0}$, prenant les dérivées de ses termes, on aura $\frac{(m-1)\sin^{m-2} x \cos x}{(n-1)\, x^{n-2}}$. Traitant pareillement $\frac{\sin^{m-2} x}{x^{n-2}}$ et les suivants, comme m et n sont entiers, on voit facilement que la vraie valeur de $\frac{\sin^m n}{x^n}$ pour $x = 0$ sera 1, 0, ou ∞ selon que $m = n$, $m > n$, $m < n$.

2° $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour $x = \infty$ $\frac{\mathrm{L}^n(x)}{x^m}$ (*) est $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport de ses dérivées

(*) J'emploie une seule lettre L pour indiquer les logarithmes *népériens*.

est $\dfrac{nL^{n-1}(x)\times\frac{1}{x}}{mx^{m-1}}=\dfrac{nL^{n-1}(n)}{mx^m}$ et devient $\frac{\infty}{\infty}$. Mais en allant jusqu'au rapport des $n^{\text{ièmes}}$ dérivées, on aura :

$\dfrac{n(n-1)\ldots 1}{m^n x^m}=0$ pour $x=\infty$; donc $\dfrac{L^n(x)}{x^m}=0$ pour $x=\infty$.

Cela devait être, un nombre croît plus rapidement que son logarithme.

$\dfrac{e^x}{x^n}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=\infty$. Le rapport des dérivées, $\dfrac{e^x}{nx^{n-1}}$, est encore $\frac{\infty}{\infty}$. Poursuivant jusqu'aux $n^{\text{ièmes}}$ dérivées on a $\dfrac{e^x}{n(n-1)\ldots 1}=\infty$. Donc $\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$ pour $x=\infty$. L'exponentielle croît plus rapidement que le nombre. En cherchant les asymptotes de la courbe $\rho=\dfrac{k}{\cos n\omega}$, on a, comme on sait : $\delta=\rho\sin(\omega-\omega')$, $\omega'=\dfrac{\pi}{2n}(2k+1)$.

Posant $\omega-\omega'=\varepsilon$, il vient $\delta=\dfrac{k\sin\varepsilon}{\cos\left(n\varepsilon+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$, qui est $\frac{0}{0}$ pour $\varepsilon=0$. Or le rapport des dérivées,

$\dfrac{k\cos\varepsilon}{-n\sin\left(n\varepsilon+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$ devient $\dfrac{k}{-n}$, donc $\lim\delta=-\dfrac{k}{n}$ (*).

3° $0\times\infty$.

On ramène ce cas à l'un des deux précédents. En effet, $f(x)\times F(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}=\dfrac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ et si $f(a)=0$, $F(a)=\infty$, on aura $0\times\infty=\frac{0}{0}=\frac{\infty}{\infty}$. Mais il n'est pas indifférent de prendre l'une ou l'autre forme.

(*) Voir Bertrand, Journal de Liouville, VI, 15, 1841. Tm.

Ainsi, $e^{\frac{1}{x^n}}x^m$ devient $\infty . 0$ pour $x=0$. Si on l'écrit : $\frac{x^m}{e^{-\frac{1}{x^n}}}$ et qu'on prenne le rapport des dérivées on a :

$\frac{mx^{m-1}}{ne^{-\frac{1}{x^n}}x^{-n-1}}=\frac{mx^{m+n}}{ne^{-\frac{1}{x^n}}}$, ce qui montre qu'on ne réussira pas de la sorte. Mettons alors le produit proposé sous la forme $\frac{e^{\frac{1}{x^n}}}{x^{-m}}$, et prenons le rapport des dérivées, il viendra $\frac{ne^{\frac{1}{x^n}}x^{-n-1}}{mx^{-m-1}}=\frac{ne^{\frac{1}{x^n}}}{mx^{-m+n}}$; actuellement si $m \overset{=}{<} n$ ce rapport est ∞; si $m>n$ on prendra de nouveau les dérivées et l'on aura $\frac{n^2e^{\frac{1}{x^n}}}{m(m-n)x^{-m+2n}}$; en poursuivant, on voit bien que, quels que soient m et n, le produit $e^{\frac{1}{x^n}}\times x^m$ est toujours ∞, pour $x=0$.

4° Symboles d'indétermination : $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

$x^{\pm\frac{1}{x-1}}$ devient $1^{\pm\infty}$ pour $x=1$. Posons $v=x^{\pm\frac{1}{x-1}}$, de là $Lv=\pm\frac{Lx}{x-1}$; on est ainsi ramené au symbole $\frac{0}{0}$. Or le rapport des dérivées de $\frac{Lx}{x-1}$ étant $\frac{1}{x}$, on a pour $x=1$:

$$L.x^{\pm\frac{1}{x-1}}=\pm 1\text{, et par suite, } 1^{\pm\infty}=e^{\pm 1}.$$

Il ne s'ensuit pas cependant qu'une fonction de x devenant $1^{\pm\infty}$, sa valeur soit toujours $e^{\pm 1}$. En effet, $\left[\frac{L(x+1)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ devient $1^{+\infty}$ pour $x=0$. Or

$$\text{L}.\left[\frac{\text{L}(x+1)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\frac{\text{L}.\frac{\text{L}(x+1)}{x}}{x}=\frac{0}{0}.$$

Prenant successivement le rapport des dérivées, on a pour $x=0$:

$$\frac{x-(x+1)\,\text{L}(x+1)}{x(x+1).\,\text{L}(x+1)}=\frac{-\text{L}(x+1)}{(x+1)\,\text{L}(x+1)+x\text{L}(x+1)+x}=-$$

$$\frac{\frac{1}{x+1}}{2+2\text{L}(x+1)+\frac{1}{x+1}}=-\frac{1}{2};$$

donc

$$\text{L}.\left[\frac{\text{L}(0+1)}{0}\right]^{\frac{1}{0}}=-\frac{1}{2},$$

et par suite

$$\left[\frac{\text{L}(0+1)}{0}\right]^{\frac{1}{0}},\ \text{ou bien}\ 1^{+\infty}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

On a de même $\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$ pour $x=0$; or

$$\text{L}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\text{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x}.$$

Prenant les rapports des dérivées successives, on aura pour $x=0$:

$$\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\frac{-\sin x}{x\cos x+\sin x}=-\frac{x\cos x+\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0;$$

donc, pour $x=0$:

$$\text{L}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=0,\ \text{et par suite}\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}},\ \text{ou bien}\ 1^{\infty}=1.$$

x^x devient 0^0 pour $x=0$; or $\text{L}.x^x=x\text{L}x$. On est ramené au symbole $0\times\infty$.

Écrivant le produit $x\mathrm{L}x$ sous la forme $\frac{\mathrm{L}x}{x^{-1}}$, et prenant le rapport des dérivées, il vient :

$$\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=-x;$$

donc, pour $x=0$, $\mathrm{L}.x^x=0$, et par suite $0^0=1$.

Une expression peut prendre accidentellement la forme 0^0, comme $\left(k^{\frac{1}{\sin x - x}}\right)^x$ pour $x=0$; mais il suffit d'effectuer les calculs, et l'on a : $k^{\frac{x}{\sin x - x}}=k^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}=0$ pour $x=0$.

Si l'on admettait, dit M. Terquem, que 0^0 soit constamment égal à 1, on serait conduit à cette conclusion absurde, que dans la surface transcendante $z=x^y$, tout l'axe des y appartient à la surface excepté le point servant d'origine. » Dans ce cas $z=x^y=0^0$ désigne z indéterminé. — (Voyez les *Nouv. Annal. de Math.*, tome VI, p. 109 et 391.)

$x^{\frac{1}{x}}$ devient ∞^0 pour $x=\infty$. Or $\mathrm{L}.x^{\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{L}x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$, et comme le rapport des dérivées, pour la même valeur de x, est $\frac{1}{x}=0$; donc pour $x=\infty$; $\mathrm{L}.x^{\frac{1}{x}}=0$, par conséquent $x^{\frac{1}{x}}$ ou bien $\infty^0=1$.

Si l'on demandait la valeur de $(\mathrm{L}x)^x$ qui devient $(-\infty)^0$ pour $x=0$, comme $\mathrm{L}(-\infty)$ est imaginaire, pour l'éviter il suffit de poser $x=2y$ et de faire $y=0$. On aura ainsi $(\mathrm{L}x)^x=[\mathrm{L}^2(2y)]^y$. Or $\mathrm{L}.[\mathrm{L}^2(2y)]^y=\frac{\mathrm{L}.\mathrm{L}^2(2y)}{y^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}$ pour $y=0$; le rapport de ses dérivées est

$$\frac{2\,\mathrm{L}(2y)\times\frac{1}{y\mathrm{L}^2(2y)}}{-y^{-2}}=-\frac{2y}{\mathrm{L}(2y)}=0.$$

Donc pour $y=0$, L. $[L^2(2y)]^y=0$, et par suite $[L^2(2y)]^y$, ou bien $(Lx)^x = \infty^0 = 1$.

Il est à remarquer qu'on obtiendra le même résultat en opérant directement sur $[L(x)]^x$ et en prenant le logarithme quoiqu'il soit imaginaire (1).

5° Il est clair que l'on ne pourra pas lever l'indétermination par les dérivées si celles-ci restent constamment et à la fois nulles ou infinies pour la valeur de x de la question.

Ainsi pour $x=0$ on a :

$$\frac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}} = \frac{\infty}{\infty}.\text{ Le rapport des dérivées est } \frac{n\,La.\,a^{\frac{1}{x^n}}x^{-n}}{mLb.\,b^{\frac{1}{x^m}}x^{-m}} = \frac{\infty}{\infty};$$

comme l'exponentielle l'emporte (§ 2°), il est aisé de voir que les rapports successifs des dérivées seront toujours $\frac{\infty}{\infty}$, et l'on n'en pourra pas avoir la vraie valeur. Pour $\frac{a^{-\frac{1}{x^n}}}{b^{-\frac{1}{x^m}}}$, ces rapports se présentent constamment $\frac{0}{0}$. Il faut alors un artifice de calcul. Dans le cas actuel il suffit de prendre le logarithme ; on a L. $\frac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}} = \frac{1}{x^n}La - \frac{1}{x^m}Lb.$ et selon que $m \lessgtr n$ ce logarithme est $\pm \infty$ pour $x=0$; et par suite le nombre sera $+\infty$ ou 0 : si $m=n$ alors, selon que $a \lessgtr b$, le logarithme sera $\pm\infty$, par suite son nombre $+\infty$ ou 0. Le dernier résultat s'obtient directement, car si $m=n$,

(1) Il est à souhaiter que dans ce recueil on démontre que, toute quantité a une infinité de logarithmes imaginaires, et que la quantité *positive seule* a un logarithme réel et une infinité d'imaginaires. (V. t. V, p. 79, for. 10.)

$\dfrac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x^n}}$ et l'on a évidemment $+\infty$ ou 0, selon que $a \gtrless b$.

Lorsqu'une expression contient des radicaux, l'emploi des dérivées, pour en lever l'indétermination, peut ne plus réussir en donnant constamment $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Ainsi, on réussit bien dans l'exemple suivant contenant trois radicaux, et l'on a pour $x=1$

$$\frac{0}{0}=\frac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{5}{3}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}(x^2-1)\times x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\infty}=0,$$

tandis que l'on ne peut plus lever l'indétermination par la règle des dérivées dans l'exemple suivant, qui ne contient que deux radicaux ; car on a, pour $x=a$,

$$\frac{0}{0}=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}x}{\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}}=\frac{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{4}{3}}}=\ldots=\frac{\infty}{\infty}$$

Il faut alors recourir à un artifice de calcul. Or, comme $x=a$ annule les deux termes, substituons $x=a+h$; les réductions faites, divisons par la plus petite puissance de h, après quoi faisons $h=0$; le résultat sera la valeur cherchée. On aura ainsi :

$$\frac{\left\{(a+h)^2-a^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{(a+h-a)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2a+h)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{3}}}=2(a+h)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{6}}=0 \text{ pour } h=0$$

On trouvera de même pour $x=-a$

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}+(x+a)^{\frac{3}{2}}+x^3+a^3}{(x+a)^{\frac{1}{3}}+(a^3-3ax^2-2x^3)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{-2a}.$$

Comme on voit, ce procédé revient, dans les fonctions algébriques, à leur ôter les racines communes.

Soit pour dernier exemple :

$$\frac{L^{\frac{2}{3}}(x)+(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\cos(1-x)^{\frac{1}{x-1}}}{\sin^{\frac{2}{3}}(x-1)+a^{-\frac{1}{x-1}}}=\frac{0}{0} \text{ pour } x=1.$$

Substituant $x=1+h$ et divisant par $h^{\frac{2}{3}}$, il vient :

$$\frac{\dfrac{L^{\frac{2}{3}}(1+h)}{h^{\frac{2}{3}}}+(-2+h)^{\frac{3}{4}}h^{\frac{1}{12}}(\cos h)^{\frac{1}{h}}}{\dfrac{\sin^{\frac{2}{3}}h}{h^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{h}}}{h}\times h^{\frac{1}{3}}}=1 \text{ pour } h=0,$$

car pour $h=0$, $\dfrac{L(1+h)}{h}=1$, $\cos^{\frac{1}{h}}h=1$, $\dfrac{\sin h}{h}=1$, $\dfrac{a^{-\frac{1}{h}}}{h}=0.$

QUESTION D'EXAMEN

sur la sinussoïde.

—

Problème. Trouver l'aire d'une sinussoïde.

Solution. Soit $y=\sin x$ l'équation donnée, axes rectangles; cherchons l'aire comprise entre les deux ordonnées y_1, y_2, correspondant aux abscisses x_1, x_2; divisons l'inter-

valle $x_2 - x_1$ en $n+1$ parties égales, et faisons $x_2 - x_1 = (n+1)h$; l'aire cherchée est évidemment la limite de la suite :

$$h[\sin x_1 + \sin(x_1+h) + \sin(x_1+h) + \ldots \sin(x_1+nh)]$$

$$= \frac{h \sin\left(x_1 + \frac{nh}{2}\right) \sin\frac{h}{2}(n+1)}{\sin\frac{h}{2}} \quad (V.\ \text{t. III, p. 523}).$$

Or, $\frac{nh}{2} = \frac{x_2 - x_1 - h}{2}$; substituant cette valeur, et faisant ensuite $h=0$ et $\frac{h}{\sin\frac{h}{2}} = 2$, il vient pour l'aire cherchée:

$2\sin\frac{1}{2}(x_2+x_1)\sin\frac{1}{2}(x_2-x_1)$; et lorsque $x_1=0$, l'aire devient $1-\cos x_2$; c'est ce que donne immédiatement le calcul intégral.

QUESTIONS D'EXAMEN

sur des lieux géométriques polaires.

—

I. *Notation.* Nous désignons par P_r la fonction homogène de deux variables x, y de degré r, et par Q_r la fonction homogène trigonométrique de degré r suivante :

$$A\sin^r\varphi + B\sin^{r-1}\varphi\cos\varphi + C\sin^{r-2}\varphi\cos^2\varphi + \ldots R\sin^2\varphi\cos^{r-2}\varphi$$
$$+ S\sin\varphi\cos^{r-1}\varphi + T\cos^r\varphi,$$

où A, B, C... R, S, T sont des constantes données.

II. Soit $P_m + P_{m-1} + P_{m-2} + \ldots P_2 + P_1 + P_0 = 0$ (1) l'équation d'une ligne plane de degré m, axes rectangulaires; prenant l'origine pour pôle et l'axe des x pour axe polaire, l'équation polaire de la courbe est

$$z^m Q_m + z^{m-1} Q_{m-1} + z^{m-2} Q_{m-2} + \ldots z^2 Q_2 + z Q_1 + P_0 = 0 \quad (2).$$

III. *Problème.* Par un point fixe donné dans le plan d'une courbe de degré m, on mène une sécante qui la rencontre en m points ; sur cette sécante, on prend un point tel que sa distance au point fixe soit égale à la somme des distances de l'origine aux points d'intersection ; trouver le lieu de ce point.

Solution. Prenons le point fixe pour origine et les axes rectangulaires ; soient (1) et (2) l'équation aux coordonnées rectangulaires et l'équation polaire de la courbe ; pour la même valeur φ, la somme de toutes les valeurs de z est $\frac{-Q_{m-1}}{Q_m}$; donc l'équation polaire de la courbe cherchée est

$$z = \frac{-Q_{m-1}}{Q_m}, \text{ ou bien } z = \frac{-z.z^{m-1}Q_{m-1}}{z^m Q_m} = \frac{-zP_{m-1}}{P_m};$$

d'où $P_m + P_{m-1} = 0$, équation aux coordonnées rectangulaires.

IV. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que le carré de sa distance à l'origine soit égal à la somme des carrés des distances de l'origine aux m points d'intersection.

Solution. On a

$$z^2 = \frac{Q^2_{m-1} - 2Q_mQ_{m-2}}{Q^2_m} = \frac{z^2.[z^{2m-2}Q^2_{m-1} - 2z^{2m-2}Q_mQ_{m-2}]}{z^{2m}Q_m^2}$$
$$= \frac{z^2[P^2_{m-1} - 2P_mP_{m-2}]}{P_m^2},$$

d'où $P_m^2 + 2P_mP_{m-2} - P^2_{m-1} = 0$.

V. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que sa distance *réciproque* à l'origine soit égale à la somme des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. Dans l'équation (2) remplaçons z par $\frac{1}{z}$, on obtient

$$P_0z^m + Q_1z^{m-1} + Q_2z^{m-2} + \ldots Q_m = 0;$$

donc

$$\frac{1}{z} = \frac{-Q_1}{P_0}; \quad z = \frac{-P_0}{Q_1};$$

d'où $P_1 + P_0 = 0$, équation d'une droite.

VI. *Problème*. Mêmes données; trouver un point tel que le carré de sa distance réciproque à l'origine soit égale à la somme des carrés des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. On a

$$\frac{1}{z^2} = \frac{Q_1^2 - 2P_0Q_2}{P_0^2}; \; z^2[Q_1^2 - 2P_0Q_2] = P_0^2 \text{ ou } P_1^2 - 2P_0P_2 - P_0^2 = 0,$$

équation d'une conique.

VII. Même procédé pour d'autres questions de ce genre et qui s'applique facilement aux surfaces.

PROGRAMME

pour le baccalauréat ès sciences du 8 *juin* 1848; *progrès*.

—

Les méthodes infinitésimales, inventées depuis deux siècles, d'une facilité rudimentaire, et qui sont pourtant, s'il est permis de s'exprimer ainsi, l'âme de toute la nature calculable, ont toujours été repoussées de nos colléges, et cela depuis l'origine jusqu'à nos jours. En 1695, Bernoulli écrit à Leibnitz que L'Hopital seul s'occupe, en France, de la nouvelle géométrie. « Mirum non est illum solum in Gallia in geo» metriæ profundiora penetrasse; ideo enim tot alii, qui his » studiis incumbunt, inter vulgares notitias torpent, quod » nostra non putent esse de pane lucrando » (*Comm. epist.*, t. 1, p. 90). Enfin cette répulsion va cesser, et nous annon-

çons avec bonheur que dans le nouveau programme on admet les notions du calcul différentiel et du calcul intégral, et leurs applications géométriques; il est vrai que cette admission n'est encore que facultative, mais le premier pas étant fait, on peut espérer que bientôt ces calculs seront obligatoires surtout pour l'entrée à l'École polytechnique.

BIBLIOGRAPHIE.

—

Discours prononcé a la distribution des prix du Lycée Monge, le 13 aout 1848, par M. Vincent, professeur de mathématiques spéciales, in-8°, 23 p.

Le nouveau nom imposé au Collége Saint-Louis a inspiré naturellement le sujet de ce discours. Outre la *Notice historique* (de Brisson, Paris, 1818), et l'*Essai historique* de M. Charles Dupin (Paris, 1819), l'auteur a eu à sa disposition des *notes manuscrites* communiquées par la famille de Monge. Aussi des renseignements inédits sur la vie intime du grand géomètre et même sur ses relations avec l'empereur, donne à ce petit écrit un assez grand intérêt. Dans la vie privée, on trouve partout l'honnête homme; c'est que là les maximes de conduite sont généralement connues, et admises par tous. Malheureusement, il n'en est pas de même pour la vie publique. La diversité d'opinions amène des diversités de jugements; aussi un des acteurs les plus illustres de notre révolution, caractère taillé sur l'antique, l'immortelle Roland, s'est exprimé sur Monge en termes fâcheux, *pour elle*, à ce que dit le savant orateur universitaire; n'oublions pas que l'ardente philosophe était chef dans le parti opposé à celui du géomètre, et que la femme est morte confessant la

république sur l'échafaud dressé par les jacobins ; tandis que l'ancien jacobin est mort stupidement persécuté, mais noble comte, fanatiquement dévoué à Sa Majesté impériale. Admirons celui qui a réduit en corps de doctrine les procédés graphiques des arts ; qui a donné l'interprétation géométrique de tant d'équations différentielles ; l'intégration des lignes de courbures de l'ellipsoïde, et tant d'autres magnifiques théorèmes ; respectons la mémoire d'un des principaux fondateurs de notre École polytechnique, notre *alma mater*. Voilà les vrais titres de Monge à la reconnaissance de la postérité. Le reste est vulgaire, appartient à la terre, et disparaît dans la tombe. D'ailleurs, l'histoire nous apprend que dans la vie des savants, la partie politique est très-rarement la partie brillante. Heureux si rien ne la ternit. Que de Bacons pour un Franklin !

Ce discours *honnête*, mérite qui devient rare, est terminé par d'excellents conseils sur les dangers du *socialisme ;* conseils qui ont déjà été promulgués, réduits à leur plus simple expression, il y a trente-trois siècles, sur la cime sinaïque, en ces termes, d'une énergique concision : *non furtum facies : non concupisces domum proximi tui ; non desiderabis uxorem ejus*. C'est très-court et très-clair.

THÉORÈMES

Sur le point de moyenne distance.

PAR M. A. WATELET,
Officier d'Académie, Directeur de l'école primaire supérieure de Soissons.

Théorème. I. Soit n points donnés dans l'espace ; qu'on prenne le centre de moyenne distance de $n-1$ de ces points ;

on peut faire cette opération n fois; on aura ainsi n nouveaux points dont le centre de moyenne distance est le même que celui des n points donnés.

Démonstration. Soient x_p, y_p, z_p les coordonnées d'un des points; donnant à l'indice p successivement les valeurs $1, 2, 3 \ldots n$, on aura ainsi les trois n coordonnées des n points; les coordonnées du centre de moyenne distance sont $\frac{\Sigma_1^n x_p}{n}$; $\frac{\Sigma_1^n y_p}{n}$; $\frac{\Sigma_1^n z_p}{n}$; ou $\frac{X}{n}$, $\frac{Y}{n}$, $\frac{Z}{n}$; séparant le point (x_1, y_1, z_1); le centre de $m.\ d.$ des $n-1$ points restants a pour coordonnées $\frac{X-x_1}{n-1}$; $\frac{Y-y_1}{n-1}$; $\frac{Z-z}{n-1}$ d'où il résulte que le centre de $m.\ d.$ des n nouveaux points a pour coordonnées $\frac{(n-1)X}{n(n-1)}=\frac{X}{n}$; $\frac{(n-1)Y}{n(n-1)}=\frac{Y}{n}$; $\frac{(n-1)z}{n(n-1)}=\frac{Z}{n}$;

C. Q. F. D.

Corollaire. En opérant sur les nouveaux points comme sur les premiers, et ainsi de suite, le centre des moyennes distances des points donnés est le *point limite*.

II. *Applications.* 1° $n=3$; les milieux des côtés du premier triangle sont les sommets du second triangle, semblable au précédent et dans une position renversée. 2° $n=4$; points dans un même plan; le second quadrilatère est semblable au premier et dans une position inverse; et en poursuivant la même opération tous les sommets homologues sont sur une même droite; $n=4$; les points sont les sommets d'un tétraèdre; le second tetraèdre, semblable au précédent, dans une position inverse et dont les sommets sont les centres de gravité des quatre faces.

3° $n=5$, ne présente rien de remarquable; mais voici un assez curieux théorème de facile démonstration.

Théorème. Dans un pentagone on peut former avec les diagonales deux systèmes de triangles; cinq formés par une

diagonale et deux côtés et cinq formés par un côté et deux diagonales; si l'on cherche les centres de gravité des triangles de l'un des systèmes et qu'on les joigne deux à deux, on détermine un nouveau pentagone : si l'on s'en sert pour faire la même opération en employant les triangles de l'autre système, on obtient un troisième pentagone semblable au premier et placé d'une manière inverse.

CONSIDÉRATIONS
sur les racines des équations algébriques.

D'après M. Minding de Berlin (Crelle, t. XX, p. 168, 1840).

—

1. *Définition* et *notation*. — Soit une fonction d'une variable $F(x)$; si dans le développement de cette fonction on remplace x par Fx, on obtient un second développement qu'on écrit $FF(x)$, ou bien $F_2(x)$; si dans ce second développement on remplace encore x par Fx, on obtient $FFF(x)$, ou $F_3(x)$; c'est ce qu'on nomme des *fonctions répétées*.

2. *Théorème*. — Dans une équation algébrique dont les racines sont des grandeurs quelconques *indépendantes* les unes des autres, toutes les racines sont des fonctions *répétées* de l'une quelconque d'entre elles.

Démonstration. Soient x_1, $x_2 \ldots x_n$ des grandeurs indépendantes qu'on peut considérer comme racines de l'équation $X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots = 0$; ensuite α étant une racine *primitive* de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$; posons :

$$nt_1 = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-1} x_n,$$
$$nt_2 = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-2} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nt_\mu = x_1 + \alpha^\mu x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-\mu} x_n$$

On en déduit, en faisant $\beta = \alpha^{-1}$,

$$x_1 = \frac{a}{n} + t_1 + t_2 + \ldots\ldots t_{n-1},$$

$$x^2 = \frac{a}{n} + \beta t_1 + \beta^2 t_2 \ldots\ldots \beta^{n-1} t_{n-1},$$

. . . .

$$x_{\mu+1} = \frac{a}{n} + \beta^{\mu} t_1 + \beta^{2\mu} t_2 + \ldots\ldots \beta^{n-\mu} t^{n-1}.$$

Faisons $t_1^n = p$; il est évident que p dépend d'une équation de degré $1.2.3 \ldots\ldots n$, nombre de permutations entre les racines; mais les permutations *cycliques* donnent les mêmes valeurs pour t_1^n, par exemple en changeant 1 en 2, 2 en 3 ...... et n en 1 ; t_1 devient αt_1; donc l'équation en p est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une polynôme de degré

$$1.2.3 \ldots\ldots n - 1 = m;$$

les coefficients font des fonctions entières de a, b, c, etc., et cette équation peut encore être réduite, comme le fait voir Lagrange dans la célèbre note XIII (*Résolution des équations numériques*). Faisons $\nu_{\mu} = n^{-\mu+1} t_{\mu} t_1^{-\mu}$, et formons l'expression

$$\nu_{\mu} = n t_{\mu} (n t_1)^{-\mu} = (x_{\mu} + \alpha^{\mu} x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \ldots \alpha^{n-\mu} x_n)(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots \alpha^{n-1} x_n)^{-\mu};$$

ν_{μ} montera aussi au degré m. Donc, d'après la méthode de Lagrange, on peut exprimer ν_{μ} rationnellement en p (*v.* t. I, Hermite) et l'on peut toujours faire disparaître p du dénominateur; l'on a :

$$\nu_{\mu} = A + B_p + C_p^2 + \ldots M_p^{m-1};$$

A, B, C sont des fonctions rationnelles de a, b, c, et l'équation $\nu_{\mu} = n^{-\mu+1} t_{\mu} t_1^{-\mu}$ donne $t_{\mu} = n^{\mu-1} \nu_{\mu} t_1^{\mu}$; les expressions des racines de ci-dessus deviennent :

$$x_1 = \frac{a}{n} + t_1 + n\nu_2 t_1^2 + n^2 \nu_3 t_1^3 + \ldots n^{n-2} \nu_{n-1} t_1^{n-1} = f(t_1),$$

$$x_2 = \frac{a}{n} + \beta t_1 + m\nu_2\beta^2 t_1^2 + \ldots \nu_{n-1}\beta^{n-1} t_1^{n-1} = f(\beta t_1),$$

etc.

ou $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(\beta t_1)$, $x_3 = f(\beta^2 t_1) \ldots . x_n = f(\beta^{n-1} t_1)$

et x_1 est une fonction rationnelle de degré $n - 1$ en t, et de degré $m - 1$ en p.

Les équations $t^n - p = 0$ et $f(t) - x_1 = 0$ ont en commun la racine t_1, et pas d'autres. En effet, toutes les racines de la première de ces équations sont de la forme $\beta_\mu t_1$, μ étant un nombre entier compris entre 0 et n; donc si la racine $\beta^\mu t_1$ appartenait aussi à la seconde de ces équations, on aurait $f(\beta^\mu t_1) - x_1 = 0$ ou $x_{\mu+1} = x_1$; l'équation donnée aurait donc des racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse; cherchant donc le diviseur commun aux deux polynômes $t^n - p$ et $f(t) - x_1$ on trouve $t_1 = \psi(x_1)$, où ψ est une fonction entière de degré $n - 1$ en x_1, et les coefficients sont des polynômes en p de degré $m - 1$; les coefficients de ces polynomes étant des fonctions rationnelles de a, b, c, etc.

De $x_1 = f(t_1)$, on a déduit $t_1 = \psi(x_1)$; et comme $x_2 = f(\beta t_1)$, on en déduira $\beta t_1 = \psi(x_2)$; de même $\beta^2 t_1 = \psi(x_3) \ldots \beta^{n-1} t_1 = \psi(x_n)$, d'où $x_2 = f(\beta\psi x_1)$, $x_3 = f(x')$, $x_4 = f(\beta\psi x_3)$, etc.

Faisant $f(\beta\psi(x_\mu)) = F(x_\mu)$, on aura :

$$x_2 = F(x_1),\ x_3 = F(x_2) \ldots . x_n = F(x_{n-1}),\ x_1 = F(x_n),$$

ou $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F_2(x_1) \ldots x_n = F_{n-1}(x_1)$; $x_1 = F_n(x_1)$, C.Q.F.D.

Application. Soit l'équation $x^3 - 3bx - 2c = 0$,

$$3t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3;\quad t^3 = p,$$

il faut former l'équation

$$\left(p - \frac{(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x^3)^3}{27}\right)\left(p - \frac{(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x^3)^3}{27}\right) = 0;$$

on a :

$\Sigma x_1^3 = +6c$; $\Sigma x_1^2 x_2 = -6c$, $(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x^3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x^3)$
$= \Sigma x_1^2 + 3b = -3b$; $\Sigma x_1^2 = 6b$,

Démonstration. Prenons O pour pôle et $Mz^2 - Nz + F = 0$ pour équation polaire, $M = A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi$; $N = -D\sin\varphi - E\cos\varphi$ et $OM = z'$; $ON = \rho$; $OM' = z''$, on aura :

$$(\rho - z')z'' = az'(z'' - \rho),\ a \text{ est le rapport constant;}$$

ou

$$z'z''(a+1) = \rho[z''(1-a) + a(z' + z'')],$$

ou

$$F(a+1) = \rho[Mz''(a-1) + aN],\quad z'' = \frac{F(a+1) - aN\rho}{M\rho(a-1)};$$

substituant cette valeur dans l'équation de la conique, il vient :

$$[a(F - N\rho) + F]^2 - N\rho(a-1)[a(F - N\rho) + F] + FM\rho^2(a-1)^2 = 0;$$

passant aux coordonnées orthogonales, il vient :

$$[a(F + Dy + Ex) + F]^2 + (a-1)[Dy + Ex][a(Dy + Ex + F) + F]$$
$$+ F(a-1)^2(Ay^2 + Bxy + Cx^2) = 0.$$

QUESTIONS.

196. La somme des puissances impaires d'une suite de nombres naturels, de 0 à n, est divisible par $n^2(n+1)^2$.

(Jacobi.)

197. Une tangente à une conique étant interceptée par deux autres tangentes parallèles; le produit des segments formés sur la première tangente par le point de contact, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente.

(Hamilton.)

198. La courbe enveloppe de toutes les hyperboles équilatères concentriques, et qui sont coupées orthogonalement par une même droite, a pour équation :

$$x^2 - y^2 - a^2 = 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}},\ \text{axes rectangulaires.}$$

(Streb‹e›r.)

AVIS IMPORTANT.

Les *Nouvelles Annales* viennent d'achever leur septième année. Les suffrages honorables d'hommes compétents nous permettent de croire que nous avons été de quelque utilité à la science et à l'enseignement, aux professeurs et aux élèves, double but que nous n'avons jamais perdu de vue. Notre recueil contient des renseignements instructifs sous le rapport didactique et historique, sur toutes les méthodes anciennes et nouvelles, sur les théories et questions, objets ordinaires des examens. Toutefois, dans le monde intellectuel et politique, tout s'avance devant nous. Et de nos jours, dans les sciences surtout, qui s'arrête, recule. De là, l'accroissement continuel chez les nations civilisées du globe, des productions périodiques qui enregistrent incessamment tous les progrès du jour. Ainsi l'Allemagne, outre le *Journal de Crelle*, *de Poggendorf*, le *Journal polytechnique de Vienne*, les *Annales d'astronomie de Schumacher*, s'est encore enrichie, depuis 1845, d'un journal consacré aux sciences exactes, sous ce titre : *Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rucksicht auf die Bedurfnisse der Lehrer an höhern unterrichts anstalten* : herausgegeben von Johann August Grunert, professor an Greifswald, 1845. Archives des Mathématiques et de la Physique, ayant égard particulièrement aux besoins des professeurs aux institutions supérieures, publiées par Jean Auguste Grunert, professeur à Greifswald. L'Italie possède plusieurs recueils scientifiques où les Tortolini, les Chelini déposent leurs beaux travaux géométriques. En Angleterre, outre le Journal de

mathématiques de Cambridge et de Dublin, publié par Thomson, et qui a pour collaborateurs les frères Roberts, les Hamilton, les Cayley, et autres grands géomètres contemporains; outre les journaux scientifiques d'Oxford, d'Édimbourg, il y a encore pour la partie élémentaire: *the Mathematician*, edited by Messrs. Rutherford and Fenwick of the royal military academy (1845, vol. 1 et 2). Le Mathématicien publié par MM. Rutherford et Fenwick de l'académie royale militaire. Le Journal de Dublin vient de commencer une seconde série, et le mouvement mathématique est tellement fort chez nos voisins au delà du détroit, qu'on réimprime une seconde édition de la première série. La géométrie surtout ancienne et moderne y est cultivée avec beaucoup d'ardeur. On y voit paraître de fréquentes traductions d'Euclide à l'usage des classes : qui en France achèterait une telle traduction? Les neuf dixièmes de nos élèves ignorent le nom d'Euclide, et on compterait facilement le nombre de professeurs qui le lisent. Nous possédons un seul journal consacré aux parties transcendantes de la science et dirigé par un célèbre géomètre, journal qui est l'émule de celui de Crelle; mais tandis que le journal prussien jouit de la haute protection de son gouvernement, celui de la France est bien loin d'avoir joui d'une telle protection sous le gouvernement déchu, au contraire. La République réparera-t-elle les torts de la monarchie? Peut-être. Mais la justice nous oblige de dire que l'ancien gouvernement, peu avant sa chute, se disposait à encourager les *Nouvelles Annales* par des souscriptions. Ces dispositions bienveillantes seront-elles maintenues; nous l'espérons.

Quoi qu'il en soit, la huitième année, nous ferons de nouveaux efforts pour mériter l'approbation du public géomètre : nous voulons que les *Nouvelles Annales* deviennent en quelque sorte un bureau de consultations pour ceux qui se livrent

avec amour à l'étude de la sainte doctrine. Ainsi tous les professeurs des départements et de la capitale pourront s'adresser par écrit ou verbalement aux rédacteurs pour obtenir des renseignements bibliographiques sur l'objet de leurs investigations. Dans cette même vue, nous donnerons les énoncés mensuels des articles des journaux étrangers ci-dessus mentionnés, et avec des développements pour ceux qui en auraient besoin.

Les élèves *abonnés* peuvent nous consulter sur les difficultés qu'ils rencontreraient dans les questions d'examen, et nous nous engageons à leur en communiquer la solution.

A partir de janvier 1849, on devra adresser les demandes d'abonnement à M. Bachelier, libraire, quai des Augustins. Il n'est rien changé aux conditions. MM. Carilian-Gœury et Dalmont (Victor), anciens éditeurs, serviront les abonnés qui ont déjà souscrit chez eux pour 1849.

On donnera toutes facilités pour acquérir les volumes qui ont déjà paru.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

PAR M. STREBOR.

Il existe une seconde analogie sur la sphère avec l'hyperbole équilatère, savoir : une ellipse sphérique, dont le petit axe est $\frac{1}{2}\pi$, rapportée au centre extérieur, situé sur le prolongement de l'axe le plus grand. Voici quelques propriétés de cette conique, que nous appellerons hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce.

I. L'hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce a pour équation polaire centrale :

$$\tang^2\rho \cos 2\omega = \tang^2\alpha.$$

II. En désignant par ω l'arc mené du centre perpendiculairement au grand cercle, tangent à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque (ρ) tiré du centre, on aura :

$$\tang \omega \tang \rho = \tang^2\alpha.$$

Dans une hyperbole équilatère plane, si l'on mène par le foyer deux cordes, mutuellement à angles droits, l'une d'elles, terminée d'un côté et de l'autre par la même branche de la courbe, sera égale à l'autre, comprise entre les deux branches opposées semblablement.

III. Dans une hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce, si l'on mène par le foyer deux arcs de grands cercles, mutuellement à angles droits, l'un d'eux, terminé d'un côté et de l'autre par la même branche de la conique, sera égal à la partie de l'autre, comprise entre les deux branches opposées.

Ce dernier théorème admet un autre énoncé, savoir :

IV. Dans une ellipse sphérique, dont le petit axe est $\frac{1}{2}\pi$, si l'on mène par le foyer deux cordes (arcs de grands cercles), mutuellement à angles droits, leur somme sera constante et égale à π.

Considérons la courbe, lieu des points pris sur les grands cercles menés du centre de l'hyperbole équilatère sphérique de l'espèce dont il s'agit, perpendiculairement aux tangentes, de manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes. Elle peut être évidemment regardée comme fournissant une analogie avec la lemniscate de Bernoulli. En la nommant donc la sphéro-lemniscate de seconde espèce, on aura les théorèmes suivants, qui vont confirmer cette analogie.

V. La sphéro-lemniscate de seconde espèce a pour équation polaire centrale :

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\rho = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos 2\omega.$$

VI. Elle coïncide avec le lieu du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée et dont le produit des tangentes trigonométriques des demi-côtés est constant, et égal au carré de la tangente trigonométrique de la quatrième partie de la base.

VII. La base du triangle dont on vient de parler, coïncide avec la distance entre les foyers contigus des branches opposées de l'hyperbole équilatère sphérique, de laquelle la sphéro-lemniscate est dérivée.

On sait que l'arc de la lemniscate de Bernoulli s'exprime par une fonction de première espèce, à module $\sqrt{\frac{1}{2}}$ pareillement.

VIII. L'arc de la sphéro-lemniscate de l'espèce dont il s'agit, s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce, à module $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

QUESTIONS

proposées au concours d'admission à l'École normale en 1848
(*V.* t. VI, p. 409).

—

Sujet de composition de physique.

Décrire les procédés au moyen desquels on mesure les températures supérieures à celle de l'ébullition du mercure.

Un ballon à col effilé, plein d'air sec, pèse $107^{g},532$ à la

température de 22° et sous la pression $0^m.760$; le même ballon plein d'eau pèse $664^g,550$. On met de l'iode et on chauffe à la température de 185° pendant très-longtemps, puis on ferme à la lampe : le ballon refroidi pèse alors $110^g,025$; on casse ensuite la pointe sous le mercure, et on fait passer dans une éprouvette graduée l'air restant : on trouve 66 centimètres cubes d'air; on demande la densité de l'iode. On donne le poids d'un centimètre cube d'eau à 22° et le coefficient de dilatation de l'air.

Sujet de composition de mathématiques.

1re *Question.* Exposer la théorie des foyers.

2e *Question.* Trouver les conditions d'équilibre d'une droite pesante dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux droites fixes, dont l'une est verticale. (*V.* p. 342.)

RECTIFICATION

relative au théorème du minimum dans le triangle (*V.* p. 407).

—

Ce théorème appartient à M. Hossard (P.), capitaine d'état-major au dépôt de la guerre ; il l'avait communiqué à M. Poudra, chef d'escadron d'état-major, en y joignant une démonstration *analytique*. Le savant officier supérieur, qui a trouvé la démonstration synthétique, m'avait donné de vive voix ces renseignements, que j'ai oublié de mentionner. Nous reviendrons sur le travail analytique de M. Hossard, qui se rattache à un problème fort important de géodésie.

GRAND CONCOURS.

Mathématiques élémentaires.

(Fig. 49). Soient donnés dans le plan d'un cercle deux droites parallèles L et L'. Par un point M pris sur l'une, on mène deux tangentes au cercle qui déterminent sur l'autre un segment AB ; on joint le point M au point I, milieu de ce segment, et l'on demande de démontrer que toutes les droites, telles que MI, vont concourir en un même point.

PAR M. JULES ORSEL,
Né le 2 août 1830, à Paris,
élève interne du lycée Monge, classe de M. Bigourdan.

Synthèse. Il faut démontrer que les droites telles que MI, remplissant les conditions de l'énoncé, passent toujours par un point fixe. Soit le cercle *o* placé en dehors des deux droites, je prends des points tels que M, M', sur LL qui est la parallèle la plus éloignée de la circonférence donnée ; je joins les points D et C, où les lignes MD, MC sont tangentes à la circonférence ; DC sera la polaire du point M par rapport au cercle *o* : c'est-à-dire, qu'une sécante M M' sera divisée harmoniquement au point M et au point où elle rencontrera DC, par rapport aux points H et H' (théorème 1 ci-après). Je fais la même construction pour le point M' que pour le point M ; je joins D' à C' ; D'C' sera la polaire du point M' ; même construction pour M'', etc. Mais M, M', M'' étant en ligne droite, les lignes DC, D'C' doivent passer par un même point qui est le pôle de la ligne LL (théorème 2). Joignons MP, je dis que cette ligne passera par le milieu du segment AB, c'est-à-dire par

le point I. Si nous prolongeons DC jusqu'à sa rencontre avec LL au point N, la ligne NC sera divisée harmoniquement aux points N, D, P, C puisque P est le pôle de LL par rapport au cercle *o*; MN, MD, MP, MC est un système harmonique; et AB étant parallèle à LL il s'ensuit que AB est partagée en deux parties égales par la droite MP (théorème 3), c'est-à-dire, que MP passe par le point I milieu de AB. *c. q. f. d.*

Analyse. Supposons le problème résolu puisque AB est parallèle à ML et que AI = IB; ML, MD, MP, MC, sera un système harmonique, et si l'on mène la ligne CD, cette ligne prolongée sera divisée harmoniquement, aux points N, D, P, C (ceci est évident d'après le théorème 3).

Mais DC ligne polaire de M par rapport au cercle *o* (théorème 1), passe par le pôle de LL (théorème 2), où NDPC est divisée harmoniquement; ce pôle n'est donc autre chose que le point P où MI rencontre DC. On peut faire le même raisonnement pour tous les points de LL; donc toutes les lignes telles que MI, M'I' passent par le point P polaire de LL.

Théorème (1). (Fig. 50.) Soit KOM tel que

$$KM : MH :: KP : PH,$$

si j'élève au point P une perpendiculaire ce sera le lieu demandé, car la circonférence O étant le lieu des points dont la distance aux points P et M est proportionnelle à HM:HP, on a successivement

$$PF : FM :: PH : HM :: PE : EM,$$

d'où $$FM : EM :: PF : PE.$$

Mais IP perpendiculaire à KM, est bissectrice de FPE;

donc $$PF : PE :: FI : IE,$$

donc $$FM : ME :: FI : IE,$$

mais si MF se rapproche de D, le rapport continue à avoir lieu; F', I', E', se rapprochant sans cesse, à la limite ils se confondront en D, et DPC sera la polaire.

Théorème 2. (Fig. 51.) Si DC est la polaire de M, MM' perpendiculaire sur OM est la polaire de P; car menons NPIM', on démontrera presque comme dans le théorème (1)

que NM' : IM' :: NP : PI ;

en effet NP : NM :: PH : HM,

PI : IM :: PH : HM ;

NP : NM :: PI : IM,

et par suite NM' : IM' :: NP : PI.

Théorème 3. (Fig. 52.) Par le point I je mène une ligne quelconque. Dans les triangles semblables MHG et BIG,

on a MH : BI :: HG : IG,

dans les triangles semblables KHM et KIA ;

on a MH : IA :: HK : KI ;

mais BI = IA ;

donc HG : IG :: KH : KI.

La réciproque est presque semblable.

HG : IG :: HK : KI,

d'où l'on tire MH : BI :: MH : IA.

Discussion. (1[er] cas.) Je supposerai que le cercle roule peu à peu vers les deux droites (Fig. 53).

Quand le cercle sera tangent ou coupera la ligne L'L', le problème restera toujours le même; car on aura toujours le faisceau harmonique MM', MD, MP, MC. Seulement le segment AB et le point I peuvent quelquefois coïncider avec DC et P ou se trouver au delà.

Si la circonférence se trouve au milieu des deux lignes (Fig. 54), il n'y a encore rien de remarquable et le point P se trouve entre M et I.

(2ᵉ cas). Supposons que la circonférence donnée soit tangente à la ligne LL, il n'y a pas alors de solutions (Fig. 55).

Le segment AB devient infini, car le point A est situé à l'infini.

Si on prenait le point M′ le segment aurait ses deux points chacun à l'infini.

(3ᵉ cas). Si le cercle coupe la ligne LL′, le problème est impossible si le point est pris dans l'intérieur du cercle, (Fig. 56.)

S'il est à l'extérieur, la construction n'est pas en défaut, seulement le point P n'est plus à l'intérieur du cercle. Du reste la démonstration est identique.

4ᵉ cas. (Fig. 57.) Si la circonférence est tout à fait extérieure, à LL on retombe presque dans le 1ᵉʳ cas, on le démontrerait aussi directement. Seulement il est plus simple de mener par le point AI une parallèle à AB, et l'on a

$$A_1I_1 : AI :: I_1B_1 : IB;$$

et la démonstration est identique à la première.

THÉORÈME

sur le cylindre et le cône circonscrits à une sphère,

PAR M. GUILLARD (Louis),
Chef de l'institut du Verbe incarné, à Lyon.

—

Théorème. Le cylindre circonscrit à une sphère est moyen proportionnel entre la sphère et le cône équilatéral circonscrit, tant pour les surfaces totales que pour les volumes.

MÉTHODE RAPIDE D'APPROXIMATION

de la racine cubique d'après le professeur Hill (Crelle, t. II, p. 262).

—

Soit a la première approximation de la racine cubique de N; faisons

$$u=\frac{1}{3}\left(1-\frac{a^3}{N}\right);\ u_1=\left(\frac{2}{3}-u\right)\frac{u^3}{(1-2u)^3};\ u_2=\left(\frac{2}{3}-u_1\right)\frac{u_1^3}{(1-2u_1)^3},$$

et on détermine de même u_3, u_4.... Ensuite posons

$$y_0=\frac{1-u}{1-2u};\ y_1=\frac{1-u_1}{1-2u_1};\ y_2=\frac{1-u_2}{1-2u_2},\ \text{etc., on aura :}$$

$$\sqrt[3]{N}=ay_0y_1y_2y_3\ldots\ldots$$

Exemple :

$$N=2;\ a=1;\ u=\frac{1}{6};\ u_1=\frac{1}{128};\ u_2=\frac{253}{768144384},\ \text{etc.};$$

$$y_0=\frac{5}{4};\ y_1=\frac{127}{126};\ y_2=\frac{768144131}{768143878};$$

$$\sqrt[3]{2}=1.\frac{5}{4}.\frac{127}{126}.\frac{768144131}{768143878},$$ vraie jusqu'à la 20ème décimale.

Cette méthode est indiquée sans démonstration.

NOTE

sur le théorème de la transversale.

—

I. *Notation.* Soit un polygone de n côtés; c_p un quelconque des côtés; l'indice p prenant les valeurs 1, 2, 3... n, on a les n côtés. Menons une transversale coupant chaque côté en deux segments; soient s_{2p-1}, s_{2p} les deux segments du côté c_p, *additifs* ou *soustractifs*, selon que leur somme ou

leur différence sera égale à c_p; convenons que deux segments adjacents, ayant en commun un sommet du polygone, l'un aura un indice pair et l'autre un indice impair. Cette convention détermine complétement l'indice de chaque segment; cela posé, on a le théorème suivant.

II. *Theorème.* Un polygone de n côtés étant coupé par une transversale, le produit des segments d'indices pairs est égal au produit des segments d'indices impairs.

Démonstration. Désignons par α_p l'un des quatre angles que fait la transversale avec le côté c_p; comme il ne s'agira que de sinus, on peut prendre un quelconque de ces angles dans le quotient du produit des segments d'indices pairs par le produit semblable d'indices impairs. Au rapport des segments $\frac{s_{2p}}{s_{2p+1}}$ on peut substituer celui des sinus $\frac{\sin \alpha_p}{\sin \alpha_{p+1}}$, et le quotient ainsi transformé, chaque sinus apparaît une fois au numérateur et une fois au dénominateur, puisque le même angle répond à deux segments d'un même côté, par conséquent l'un pair et l'autre impair; donc, etc.

III. Si la transversale passe par un sommet, un segment d'indice pair et un autre d'indice impair devient zéro, et le rapport se réduit à $\frac{0}{0}$.

IV. Soient $s_{2p} - s_{2p-1} = c_p$, d'où $\frac{s_{2p}}{s_{2p-1}} = 1 + \frac{c_p}{s_{2p-1}}$, donc si la transversale devient parallèle au côté c_p, le rapport $\frac{s_{2p}}{s_{2p-1}}$ devient égal à l'unité; le rapport des produits se simplifie et ne contient plus que $n-1$ rapports. Le polygone ayant plusieurs côtés parallèles, si la transversale est parallèle à ces côtés, il disparaît de chaque terme du quotient autant de facteurs qu'il y a de côtés.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces tables à l'extrême obligeance de M. le professeur Anne (Léon).

(*) Nom anagrammatique.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne et trigonométrie sphérique.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

VII. Géométrie analytique à trois dimensions.

VIII. Statistique et mécanique.

IX. Mathématiques infinitésimales.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Algèbre élémentaire.

II. Algèbre supérieure.

III. Géométrie élémentaire.

IV. Géométrie analytique à deux dimensions.

II. Géométrie analytique à deux dimensions.

III. Statique.

IV. Questions à résoudre.

V. Bibliographie.

QUESTIONS [illegible] RÉSOLUES

Dans les sept premiers volumes.

TOME I.

N°		Page
2	(bis)	122
4	(bis)	ib.
9		144
25		247
28		ib.
31		394
34		395
35		[illegible]
41		[illegible]
45		519
47		ib.
50		520
52		ib.
56		521
57		ib.

TOME II.

60		48
61		ib.
62	(Stewart)	96
63		137
66		326
78		455
79		ib.

TOME III.

81	40
83	ib.
84	ib.
87	376
88	ib.
89	ib.

TOME IV.

N°	Page
93	259
95	260
[illegible]	270
103	ib.

TOME V.

116	107
117	ib.
120	[illegible]
125	[illegible]
136	ib.
139	ib.

TOME VI.

140	135
141	ib.
145	216
148	ib.
153	252
165	[illegible]
166	ib.
167	ib.
174	454

TOME VII.

176	45
180	157
181	ib.
182	ib.
183	158
190	240
192	368
193	ib.
194	ib.
195	ib.
196	448
197	ib.
198	ib.

Observation. Sur 198 questions, il en reste 60 à résoudre.

ERRATA.

—

TOME I (*Sixième supplément*).

Page 492, ligne 10, en remontant, $\frac{k'}{m}$, *lisez :* o.
Page 494, ligne 10, en descendant, $-4LN$, *lisez :* $+4LN$.
Page 494, ligne 10, en descendant, $-4N^2$, *lisez :* $+4N^2$.

TOME II (*Cinquième supplément*).

Page 306, ligne 14, en descendant, Ex'', *lisez :* Ex'.
Page 435, ligne 4, en remontant, N^3, *lisez :* $16N^3$.

TOME V (*Deuxième supplément*).

Page 41, ligne 11, en remontant, des, *lisez :* du.
Page 80, ligne 12, en descendant, $1+\text{tang}\,2^2x$, *lisez :* $1+\text{tang}^2x$.
Page 506, ligne 3, en descendant, u, *lisez :* t.

TOME VI (*Premier supplément*).

Page 127, ligne 8, en remontant, $\frac{-A'}{A} - \alpha B$, *lisez :* $-\frac{A_1}{A} - \alpha\frac{B}{A}$.

Page 127, ligne 5, en remontant, $-B$, *lisez :* $-\frac{B}{A}$.

Page 127, ligne 3, en remontant, $-B$, *lisez :* $-\frac{B}{A}$.

Page 128, ligne 10, en descendant, B, *lisez :* $\frac{B}{A}$.

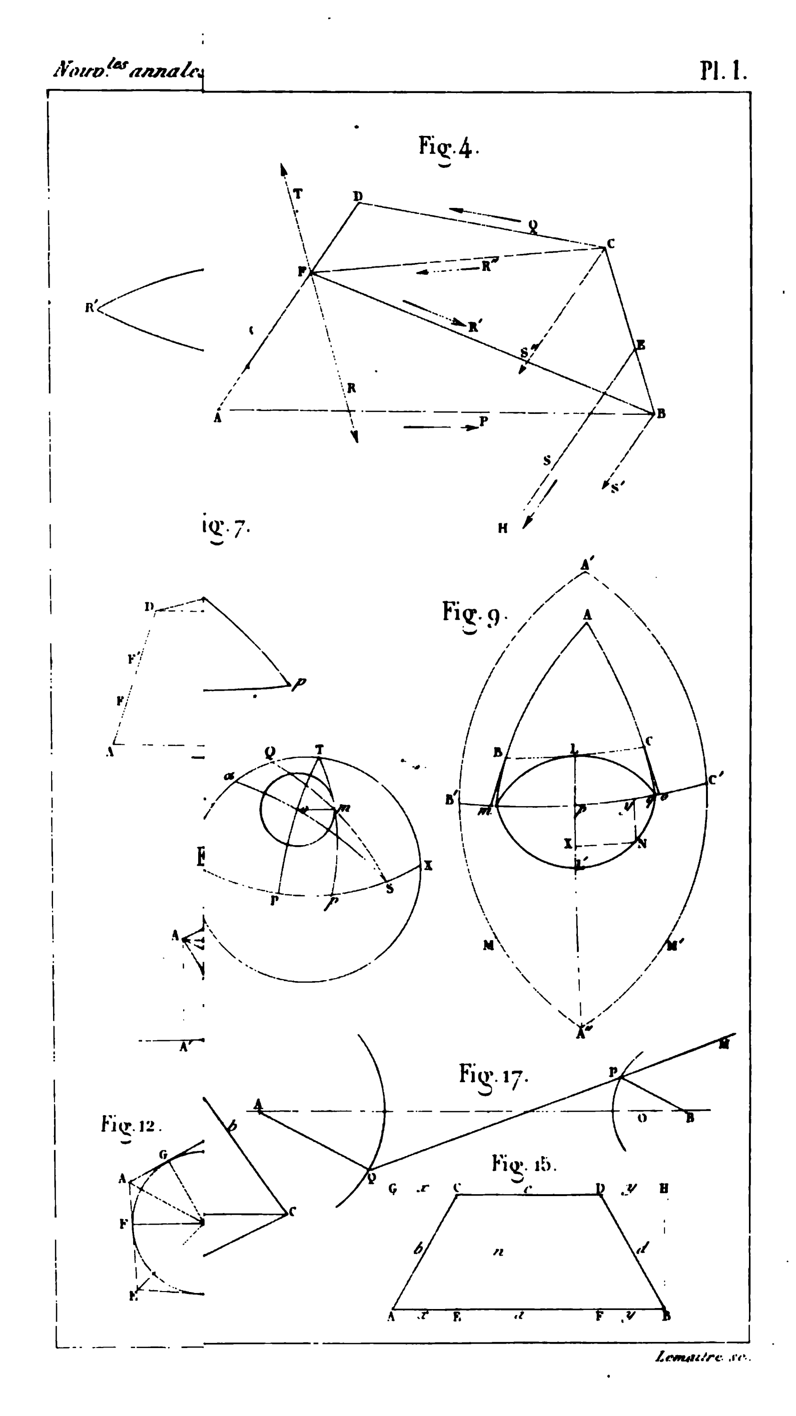
Page 128, ligne 12, en descendant, B, *lisez :* $\frac{B}{A}$.

TOME VII.

Page 8, ligne 11, en remontant, dx', *lisez :* dx_1.
Page 9, ligne 10, en descendant, $2Cx + By + Ez$, *lisez :* $2Cx' + By' + Ez'$.
Page 15, ligne 4, en descendant, arce, *lisez :* arc.
Page 21, ligne 13, en remontant, des, *lisez :* de.

Page 30, ligne 6, en descendant, $\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$, *lisez :* $\frac{1}{2}-\frac{a}{2}$.
Page 31, ligne 12, en descendant, quantité, *lisez :* quantités.
Page 37, ligne 4, en descendant, carrés, *lisez :* carré.
Page 127, ligne 14, en descendant, R^2, *lisez :* m^2.
Page 144, ligne 4, en descendant, 25, *lisez :* 25 *bis*.
Page 166, ligne 14, en descendant, des, *lisez :* du.
Page 160, ligne 3, en remontant, $a+s+1ab_0$, *lisez :* $a_{r+s+1}b$.
Page 160, ligne 9, en descendant, $a^{2,0}$, *lisez :* $a_{2,0}$.
Page 169, ligne 7, en descendant, questions, *lisez :* équations.
Page 186, ligne 7, en descendant, des, *lisez :* du.
Page 186, ligne 8, en descendant, faisceaux, *lisez :* faisceau.
Page 201, ligne 13, en descendant, $s2^n$, *lisez :* s^{2n}.
Page 204, ligne 8, en remontant, $x2^n$, *lisez :* x^{2n}.
Page 204, ligne 3, en remontant, $x2^n$, *lisez :* x^{2n}.
Page 207, ligne 8, en descendant, première, *lisez :* corde.
Page 210, ligne 3, en remontant, $(x^2+y^2)^m$, *lisez :* $(x^2+y^2)^{2m}$.
Page 263, ligne 8, en remontant, équations, *lisez :* inconnues.
Page 277, ligne 3, en descendant, ordonnées, *lisez :* coordonnées.
Page 283, ligne 7, en descendant, point matériel, *lisez :* points matériels.
Page 283, ligne 5, en remontant, s_n, *lisez :* S_n.
Page 288, ligne 7, en remontant, $n+1$, *lisez :* $r+1$.
Page 288, ligne 5, en remontant, $x^m M^2$, *lisez :* $x^{m-2}M$.
Page 31?, ligne 8, en remontant, ξ, *lisez :* ζ.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cᵉ,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.



Lemaitre sc.

Fig.

Fig. 21.

Fig.

Fig. 25.

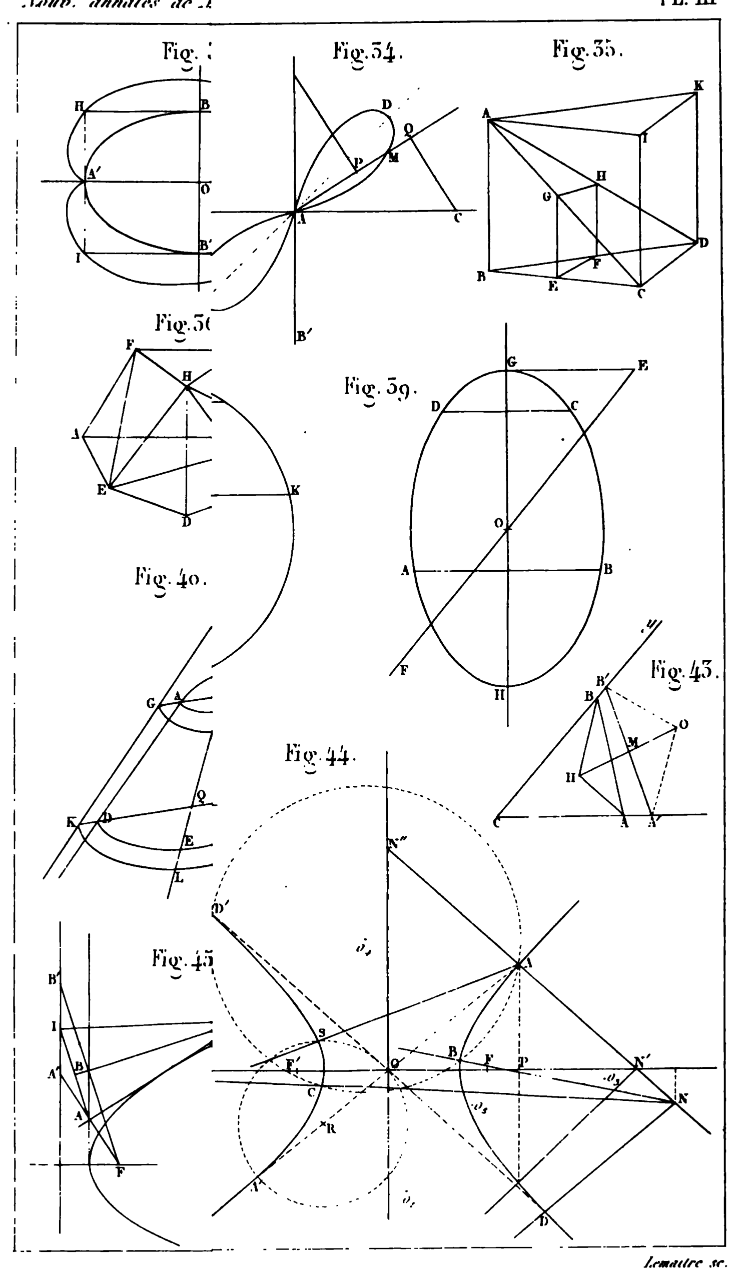
Fig. 25.bis

Fig. 27.

Fig. 30.

Fig. 28

Lemaitre sc.



Lemaître sc.

Fig

Fig. 21.

Fig

Fig. 25.

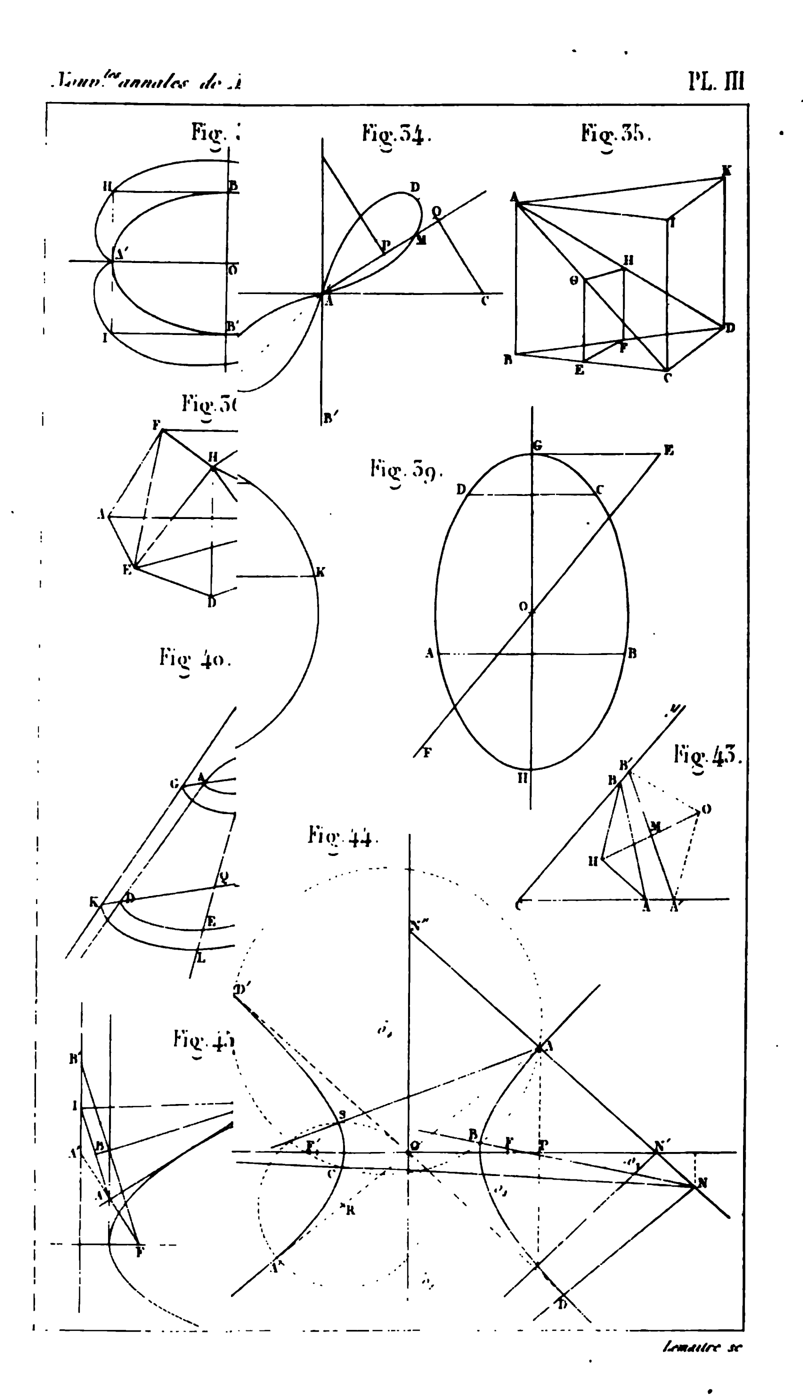
Fig. 25.bis

Fig. 27.

Fig. 30.

Fig. 28

Lemaitre sc.



Lemaître sc.

